DU

MOUVEMENT

D'UN CORPS SOLIDE QUELCONQUE LORSQU'IL TOURNE AUTOUR D'UN AXE MOBILE.

PAR M. EULER.

Quelque mouvement que puiſſe avoir un corps ſolide, dont les parties conſervent toujours entr'elles les mêmes diſtances, on ſait qu'il eſt permis de l'enviſager comme compoſé de deux ſortes de mouvement. Premierement, on conſidere uniquement ſon centre de gravité, comme ſi toute la matiere y étoit réunie, & on examine le mouvement, qui convient à ce point, qu'on nomme le mouvement progreſſif du corps; de ſorte que, ſi le centre de gravité ne change point de place, on dit que le corps n'a aucun mouvement progreſſif, quel que ſoit d'ailleurs le mouvement des autres parties du corps. Enſuite, ayant connu le mouvement du centre de gravité du corps, on conſidere ſi tous les autres points du corps ſont portés par un mouvement ſemblable, de ſorte qu'à chaque inſtant tous les points ſe meuvent ſelon la même direction & avec la même viteſſe que le centre de gravité; ou ſi leur mouvement eſt différent de celui du centre de gravité. Dans le premier cas, on juge que le corps n'a d'autre mouvement que le progreſſif, ou celui dont le centre de gravité eſt porté: or, dans l'autre cas, on voit qu'il ſe trouve dans le corps, outre le mouvement progreſſif, encore un autre mouvement particulier qu'on nomme mouvement de rotation. Pour mieux connoitre cette différence, on n'a qu'à ſe figurer que l'eſpace dans lequel le corps ſe meut, eſt porté dans un ſens contraire avec une viteſſe égale à celle du centre de gravité du corps. Par ce moyen, le centre de gravité ſera réduit

duit en repos; & ſi le corps n'eût point auparavant d'autre mouvement que le progreſſif, il ſe trouvera à préſent dans un repos parfait. Mais, ſi le mouvement progreſſif a été accompagné d'un mouvement de rotation, ce dernier ne ſera pas détruit par le tranſport mentionné de l'eſpace; mais chaque partie conſervera encore à l'égard du centre de gravité le même mouvement rélatif qu'elle avoit auparavant. Cette idée nous conduit à une connoiſſance du mouvement de rotation qui eſt indépendant de l'autre mouvement progreſſif; & c'eſt ainſi qu'on peut ſe repréſenter ſéparément l'un & l'autre de ces deux mouvemens. Pour connoître le mouvement progreſſif, on ne conſidérera que le centre de gravité tout comme ſi toute la matiere du corps y étoit réunie; & pour connoître le mouvement de rotation, on ne regardera plus le mouvement progreſſif, mais on conſidérera le centre de gravité comme s'il étoit en repos.

Quoique cette ſéparation ne ſe faſſe que dans nos penſées, elle eſt pourtant conforme aux principes de la Mécanique; en vertu desquels il eſt certain que le mouvement progreſſif d'un corps quelconque, qui n'eſt ſollicité par aucune force, doit demeurer toujours le même; ou bien le centre de gravité conſervera toujours la même viteſſe ſuivant la même direction, conformément au principe de l'inertie, tout comme ſi toute la maſſe du corps étoit raſſemblée dans le centre de gravité. Et de plus, s'il y a des forces qui agiſſent ſur le corps, le mouvement progreſſif en ſera également altéré, que ſi toute la matiere du corps étoit actuellement réunie dans le centre de gravité, & que toutes les forces fuſſent appliquées à ce point, chacune ſuivant ſa direction: de ſorte que la détermination du mouvement progreſſif n'eſt plus aſſujettie à aucune difficulté, vu qu'elle ſuit les mêmes regles, ſoit que le corps ait outre cela quelque mouvement de rotation ou non.

Il en eſt de même du mouvement de rotation, qui étant indépendant du mouvement progreſſif, ſuit toujours les mêmes regles, comme ſi le centre de gravité ſe trouvoit actuellement en repos. Par con-

conſéquent, quelque compliqué que ſoit le mouvement d'un corps, & de quelques forces qu'il ſoit ſollicité, on parviendra à la connoiſſance de ce mouvement par les deux opérations ſuivantes.

D'abord on fera abſtraction du mouvement de rotation, & on conſidérera le corps comme ſi toute ſa maſſe étoit réunie dans le centre de gravité, où l'on rapporte auſſi toutes les forces dont le corps eſt ſollicité, chacune ſuivant ſa direction; & alors les principes connus de Mécanique montreront le vrai mouvement progreſſif du corps.

Enſuite on fera abſtraction du mouvement progreſſif, & on conſidérera le corps tout comme ſi ſon centre de gravité étoit en repos, ou qu'il y fut arrêté par une force quelconque. Il s'agit donc alors de déterminer le mouvement de rotation que le corps aura autour de ſon centre de gravité, tant par rapport à ſon mouvement imprimé que par rapport aux forces dont il eſt ſollicité. Après qu'on aura déterminé chacun de ces deux mouvemens à part, en les combinant enſemble, on aura le mouvement tout entier du corps en queſtion.

Or, quelque aiſée que ſoit la premiere de ces deux recherches, qui regarde le mouvement progreſſif, l'autre qui roule ſur le mouvement de rotation, eſt d'autant plus difficile: & ſi l'on excepte quelques cas aſſez ſimples en eux-mêmes, on peut dire que les regles qu'on doit ſuivre dans cette recherche, ſont encore presque entierement inconnues. Car, quoique j'aye déjà dévelopé dans une Piece, qui porte le titre: *Découverte d'un nouveau principe de Mécanique*, les formules, qui peuvent conduire à ce but, l'application en eſt pourtant ſouvent extrèmement difficile; & pour ſurmonter ces difficultés, il ſemble que le plus ſur moyen ſera d'entreprendre la même recherche en pluſieurs manieres différentes, & de repréſenter les regles que j'ai déjà trouvées ſous d'autres formes, afin de nous les rendre plus familieres, & d'en connoitre mieux la force. Car on ſait par l'expérience, que lorsqu'une recherche eſt fort épineuſe, les premiers efforts nous en éclairciſſent ordinairement fort peu; & ce n'eſt que par des efforts réiterés, & en enviſageant la même choſe ſous pluſieurs points de vuë, qu'on parvient à une connoiſſance accomplie.

Je

Je m'en vai donc faire de seconds efforts pour rechercher la théorie du mouvement de rotation des corps solides, qui ne manqueront pas de nous fournir de plus grands éclaircissemens sur cette matiere, qui paroit encore si obscure. Or je remarque d'abord que la plus grande partie de cette obscurité tire son origine de la maniere de se bien représenter le mouvement dont un corps tourne sur son centre de gravité: & partant je tâcherai de donner une méthode, par laquelle on puisse se former une idée distincte d'un tel mouvement, quel qu'il soit: & ensuite je déterminerai les forces qui sont requises pour l'entretien de ce mouvement. Ce sera le sujet des propositions suivantes.

PROPOSITION I.

1. *Si un corps tourne d'un mouvement quelconque sur son centre de gravité, on demande de quelle maniere on peut le mieux représenter ce mouvement, & s'en former une juste idée.*

SOLUTION.

Soit *klm* le corps dont il faut représenter le mouvement, Planche Fig. 1.
qu'il peut avoir autour de son centre de gravité O, que je suppose demeurer toujours en repos. Qu'on marque sur ce corps un point *m*, par lequel & le centre de gravité O on fasse passer la droite indéfinie MOK, que je nommerai l'axe du corps. Soit outre cela MLK un plan, qui coupe le corps par l'axe MK, & qui marque en sa surface la ligne *mlk*. C'est pour avoir des marques distinguées sur le corps, par la position desquelles on puisse juger à chaque moment du mouvement du corps. Ainsi, si le corps en question étoit la Terre, la ligne MK seroit l'axe de la Terre, le point *m* & *k* ses Poles, & le plan MLK le premier Méridien; or, pour tout autre corps, j'employerai ces mêmes dénominations, quel que soit leur mouvement. Ayant donc fixé sur le corps ces marques, savoir l'axe MK & le Méridien MLK, Fig. 1.
je rapporte le corps à l'espace infini, de sorte que le centre de gravité y occupe le centre O, autour duquel je conçois, comme dans le Ciel,

 ou

ou ſur la ſurface du globe celeſte, premierement l'horizon ADB, auquel repond le zénith C, & enſuite un cercle vertical CA, par rapport auxquels je conſidérerai à chaque tems la ſituation du corps: car, ayant déterminé pour chaque inſtant la poſition tant de l'axe du corps que de ſon méridien à l'égard de l'horizon ADB, & du cercle vertical fixe CA, on connoitra parfaitement le mouvement du corps.

Soit donc, après un tems écoulé quelconque $= t$, l'axe du corps en OM, & ſon méridien dans le plan OML, de ſorte que M ſera ſur la ſurface de la ſphere celeſte, & ML un grand cercle. Qu'on tire par le point M le cercle vertical CMP, & qu'on nomme

l'angle ACM ou l'arc AP $= p$,

la diſtance du point M au zénith C ou l'arc CM $= q$,

& l'angle CML $= r$,

& il eſt évident, que ſachant pour chaque tems propoſé t ces trois angles ou ans, p, q, r, on connoitra la ſituation du corps, & partant auſſi ſon mouvement, puisque ces trois quantités ſeront variables avec le mouvement du corps, pendant que les points A & C demeurent fixes. Car de là on pourra déterminer à ce même inſtant le lieu où ſe trouvera chaque élément du corps Z, puisqu'on en ſait la ſituation par rapport à l'axe OM & au premier méridien du corps ML. Pour cet effet, tirons du centre O par cet élément Z le rayon OZN, & poſant la diſtance OZ $= s$, on aura premierement l'angle MON, dont la meſure ſera l'arc MN, qui ſoit $= u$; de plus on ſaura auſſi l'inclinaiſon du plan MON au premier méridien du corps OML ou l'angle LMN, qui ſoit $= v$; de ſorte que la poſition de cet élément Z par rapport au corps ſera déterminée par les quantités s, u, & v, qui demeureront conſtantes, tant qu'on conſidere le même élément, quel que ſoit le mouvement du corps: & partant ces quantités s, u, v, ſeront indépendantes du tems t, dont les trois autres quantités p, q, r, qui dépendent du mouvement du corps, ſont des fonctions.

Or

Or, comparant les quantités s, u, v, avec les trois variables p, q, r, on pourra déterminer pour l'instant présent le lieu de l'élément du corps Z par rapport à la sphere fixe. Car, tirant par le point N le cercle vertical CNQ, on aura dans le triangle sphérique CMN, 1°. le côté CM $= q$; 2°. le côté MN $= u$; & 3°. l'angle CMN $=$ CML $-$ LMN $= r - v$. De là on trouvera

$$\operatorname{cof} CN = \operatorname{cof}(r - v) \operatorname{fin} q \operatorname{fin} u + \operatorname{cof} q \operatorname{cof} u,$$

$$\operatorname{tang} MCN = \frac{\operatorname{fin}(r - v) \operatorname{fin} u}{\operatorname{fin} q \operatorname{cof} u - \operatorname{cof}(r - u) \operatorname{cof} q \operatorname{fin} u}.$$

& ayant trouvé l'angle MCN, on aura la distance au premier vertical CA, ou l'angle ACN $=$ ACM $+$ MCN. De plus on pourra aussi déterminer le lieu de l'élément Z par trois coordonnées orthogonales, dont nous aurons besoin dans le calcul suivant. Pour cet effet, qu'on baisse du point Z sur le plan horizontal la perpendiculaire ZY & du point Y qu'on tire la perpendiculaire YX au rayon fixe OA; & soient OX $= x$; XY $= y$; & YZ $= z$. De là on aura d'abord YZ $= z =$ OZ fin QN $= s \operatorname{cof} CN$, donc $z = s(\operatorname{cof}(r - v) \operatorname{fin} q \operatorname{fin} u + \operatorname{cof} q \operatorname{cof} u)$. De même on aura OY $= s \operatorname{fin} CN$, & puisque l'angle AOQ $=$ ACN $= p +$ MCN, on en tirera

$$XY = y = s \operatorname{fin} CN \operatorname{fin}(p + MCN), \quad \&$$
$$OX = x = s \operatorname{fin} CN \operatorname{cof}(p + MCN).$$

Or par la trigonométrie sphérique nous savons qu'il est:

$$\operatorname{fin} CN. \operatorname{fin} MCN = \operatorname{fin}(r - v) \operatorname{fin} u,$$
$$\operatorname{fin} CN. \operatorname{cof} MCN = \operatorname{fin} q \operatorname{cof} u - \operatorname{cof}(r - v) \operatorname{cof} q \operatorname{fin} u,$$

donc, puisque

$$\operatorname{fin}(p + MCN) = \operatorname{fin} p \operatorname{cof} MCN + \operatorname{cof} p \operatorname{fin} MCN, \quad \&$$
$$\operatorname{cof}(p + MCN) = \operatorname{cof} p \operatorname{cof} MCN - \operatorname{fin} p \operatorname{fin} MCN,$$

 on

on aura

$$y = s(\sin p \sin q \cos u - \sin p \cos(r-v) \cos q \sin u + \cos p \sin(r-v) \sin u),$$

$$x = s(\cos p \sin q \cos u - \cos p \cos(r-v) \cos q \sin u - \sin p \sin(r-v) \sin u),$$

C'eſt donc par ce moyen qu'on ſe formera une juſte idée du mouvement du corps propoſé.

COROLLAIRE I.

2. Dans le triangle ſphérique CMN on trouvera auſſi aiſément l'angle CNM, par cette formule

$$\text{tang CNM} = \frac{\sin(r-v) \sin q}{\cos q \sin u - \cos(r-v) \sin q \cos u},$$

& de là on obtiendra ces formules

$$\sin \text{CN}. \sin \text{CNM} = \sin(r-v) \sin q,$$

$$\sin \text{CN}. \cos \text{CNM} = \cos q \sin u - \cos(r-v) \sin q \cos u.$$

COROLLAIRE II.

3. Les formules trouvées pour les trois coordonnées x, y, z, auront lieu pour tous les élémens du corps ſitués dans le rayon ON, en ne changeant que la diſtance OZ $= s$, les deux angles u & v demeurent les mêmes. Car on aura:

$$\frac{x}{s} = \cos p \sin q \cos u - \cos p \cos(r-v) \cos q \sin u - \sin p \sin(r-v) \sin u,$$

$$\frac{y}{s} = \sin p \sin q \cos u - \sin p \cos(r-v) \cos q \sin u + \cos p \sin(r-v) \sin u,$$

$$\frac{z}{s} = \cos(r-v) \sin q \sin u + \cos q \cos u.$$

COROL-

COROLLAIRE III.

4. De là il eſt clair, qu'il y aura:

1°. $\frac{x\cos p + y\sin p}{s} = \sin q \cos u - \cos(r-v)\cos q \sin u,$

2°. $\frac{y\cos p - x\sin p}{s} = \sin(r-v)\sin u,$

3°. $\frac{z\cos q + x\cos p \sin q + y\sin p \sin q}{s} = \cos u,$

4°. $\frac{z\sin q - x\cos p\cos q - y\sin p\cos q}{s} = \cos(r-v)\sin u,$

5°. $\frac{z\sin q\cos(r-v) - x(\cos p\cos q\cos(r-v) + \sin p\,\text{ſ}(r-v)) - y(\text{ſ}p\cos q\cos(r-v) - \cos p\,\text{ſ}(r-v))}{s} = \text{ſ}u,$

6°. $z\sin q\,\text{ſ}(r-v) - x(\cos p\cos q\sin(r-v) - \sin p\cos(r-v)) - y(\text{ſ}p\cos q\,\text{ſ}(r-v) + \cos p\cos(r-v)) = 0,$

& enfin

7°. $xx + yy + zz = ss.$

COROLLAIRE IV.

5. Si l'élément Z eſt pris dans l'axe même OM du corps, l'angle MON ou l'arc MN $= u$ évanouïra, & les trois coordonnées pour ce point Z, poſant ſa diſtance au centre de gravité OZ $= s$, ſeront:

$$\frac{x}{s} = \cos p \sin q; \quad \frac{y}{s} = \sin p \sin q; \quad \& \ \frac{z}{s} = \cos q,$$

PROBLEME II.

6. *Quelque mouvement qu'ait le corps autour de ſon centre de gravité* O, *trouver pour chaque inſtant le rayon* ON, *de ſorte que les élémens du corps ſitués dans ce rayon demeurent immobiles pendant cet inſtant.*

SOLU-

SOLUTION.

J'ai déjà demontré que, quel que soit le mouvement du corps, son centre de gravité demeurant en repos, il y a toujours à chaque instant une ligne dans le corps, qui n'a aucun mouvement, & autour de laquelle le corps tourne pendant cet instant. Soit donc ON cette ligne autour de laquelle le corps tourne à l'instant présent, & il est clair que cette ligne, ou le point N, aura cette propriété, que pendant que le point M & le méridien ML changent infiniment peu de place, le point N demeure fixe. Donc, posant pour ce point N l'arc MN $= u$, & l'angle LMN $= v$, ce point aura cette propriété que, pendant que les quantités p, q, r, croissent de leurs différentiels dp, dq, dr, tant la distance CN que l'angle ACN n'en souffrent aucun changement: ou bien posant les quantités p, q, r, variables, nous trouverons ce point N, si nous mettons égaux à zéro les différentiels des quantités CN & ACN. Donc nous aurons $d.\,CN = 0$, & puisque $ACN = p + MCN$, nous aurons de plus $dp + d.\,MCN = 0$, ou $d.\,MCN = -dp$. Ayant donc $\cos CN = \cos(r - v) \sin q \sin u + \cos q \cos u$, nous aurons premierement,

$$-dr \sin(r-v) \sin q \sin u + dq \cos(r-v) \cos q \sin u - dq \sin q \cos u = 0,$$

Ensuite, puisque $\sin CN.\ \sin MCN = \sin(r - v) \sin u$, la différentiation nous fournira

$$d.MCN.\sin CN \cos MCN = -dp \sin CN \cos MCN = dr \cos(r-v) \sin u,$$

& mettant pour $\sin CN \cos MCN$ sa valeur, nous obtiendrons cette équation:

$$dp \sin q \cos u - dp \cos(r-v) \cos q \sin u + dr \cos(r-v) \sin u = 0.$$

La premiere de ces équations donne

$$\sin q \cos u - \cos(r-v) \cos q \sin u = -\frac{dr}{dq} \sin(r-v) \sin q \sin u,$$

&

& l'autre

$$\sin q \cos u - \cos(r-v) \cos q \sin u = - \frac{dr}{dp} \cos(r-v) \sin u,$$

d'où nous tirons, en divisant par $- dr \sin u$:

$$\frac{\sin (r - v) \sin q}{dq} = \frac{\cos (r - v)}{dp},$$

ou bien $\operatorname{tang} (r - v) = \frac{dq}{dp \sin q}$, de là nous aurons:

$$\sin (r - v) = \frac{dq}{\sqrt{(dp^2 \sin q^2 + dq^2)}}, \quad \&$$

$$\cos(r - v) = \frac{dp \sin q}{\sqrt{(dp^2 \sin q^2 + dq^2)}},$$

ces valeurs étant substituées dans l'une ou l'autre des deux équations donneront

$$\sin q \cos u = \frac{dp \sin q \cos q \sin u - dr \sin q \sin u}{\sqrt{(dp^2 \sin q^2 + dq^2)}},$$

& partant $\operatorname{tang} u = \frac{\sqrt{(dp^2 \sin q^2 + dq^2)}}{dp \cos q - dr}$, donc

$$\sin u = \frac{\sqrt{(dp^2 \sin q^2 + dq^2)}}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2 - 2 dp dr \cos q)}}, \quad \&$$

$$\cos u = \frac{dp \cos q - dr}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2 - 2 dp dr \cos q)}}.$$

Maintenant, substituant ces valeurs, nous aurons pour la position du point N, & partant aussi pour celle du rayon ON qui demeure immobile pendant l'instant présent.

$$\cos CN = \frac{dp - dr \cos q}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2 - 2 dp\, dr \cos q)}}, \quad \&$$

$$\sin CN = \frac{\sqrt{(dq^2 + dr^2 \sin q^2)}}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2 - 2 dp\, dr \cos q)}},$$

& ensuite $\tan MCN = - \frac{dq}{dr \sin q}$, d'où nous tirons

$$\tan ACN = \frac{dr \sin p \sin q - dq \cos p}{dr \sin p . \sin q - dq \sin p}.$$

COROLLAIRE I.

7. Si nous prenons dans ce rayon ON un point quelconque Z, de sorte que $OZ = s$, & que nous le rapportions aux trois coordonnées $OX = x$, $XY = y$, & $YZ = z$, nous aurons

$$\frac{x}{s} = \frac{- dq \sin p - dr \cos p \sin q}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2 - 2 dp\, dr \cos q)}},$$

$$\frac{y}{s} = \frac{dq \cos p - dr \sin p \sin q}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2 - 2 dp\, dr \cos q)}},$$

$$\frac{z}{s} = \frac{dp - dr \cos q}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2 - 2 dp\, dr \cos q)}}.$$

COROLLAIRE II.

8. Puisqu'à l'instant présent tout le corps se tourne autour de la ligne ON, la direction de mouvement de chaque élément du corps sera perpendiculaire au plan qui passe par ON & par cet élément, & sa vitesse sera proportionelle à la distance de chaque élément depuis le rayon ON.

COROLLAIRE III.

9. Donc, dès qu'on sait la vitesse d'un seul point du corps, on en déterminera aisément la vitesse de tout autre point de ce corps: on n'a

n'a besoin que de savoir la vitesse de rotation dont ce corps tourne autour du rayon ON: & cette vitesse de rotation se trouvera en divisant la vitesse d'un point quelconque par la distance de ce point au rayon ON.

Corollaire IV.

10. Or, pendant l'élément du tems dt, le point M de l'axe du corps parvient en m, de sorte que l'angle $MCm = dp$, & $Cm = q + dq$: donc, décrivant du centre C l'arc infiniment petit Mr, on aura $mr = dq$, & $Mr = dp \sin q$: d'où l'espace décrit par le point M sera $Mm = \sqrt{(dp^2 \sin q^2 + dq^2)}$, qui étant divisé par le tems dt exprimera la vitesse du point Fig. 1.

$$M = \frac{\sqrt{(dp^2 \sin q^2 + dq^2)}}{dt}.$$

Corollaire V.

11. Mais la distance du point M à l'axe ON étant $=$ Fig. 1.
$\sin MN = \sin u$, la vitesse de rotation de ce point M, & partant aussi celle de tout le corps autour du rayon ON, sera $=$

$$\frac{\sqrt{(dp^2 \sin q^2 + dq^2)}}{dt \sin u}.$$

Or, ayant trouvé

$$\sin u = \frac{\sqrt{(dp^2 \sin q^2 + dq^2)}}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2 - 2\,dp\,dr \cos q)}},$$

la vitesse de rotation du corps autour du rayon ON sera $=$

$$\frac{1}{dt} \sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2 - 2\,dp\,dr \cos q)}.$$

Corollaire VI.

12. Ici il faut remarquer, que les lettres p, q, r, marquent des arcs de cercles pris dans un cercle dont le rayon ou le sinus total est $= 1$. Car, quoique j'aye supposé la sphere ACBD infinie

 pour

pour avoir un espace absolu & immobile, rien n'empêche que cette sphere ne soit finie, pourvu qu'elle représente un espace immobile, & partant il est permis d'exprimer le rayon de cette sphere OM, ou ON, par l'unité, puisque sa grandeur absolue n'entre en aucune façon dans le calcul.

Remarque I.

13. C'est ainsi qu'on se pourra le mieux représenter le vrai mouvement de la terre autour de son centre. Soit pour cet effet la terre le corps, dont je suppo.· le centre de gravité en O, & soit dans la sphere céleste C le pole de l'écliptique, & le cercle ADB l'écliptique même; & CA un cercle de latitude fixe. Soit pour l'instant présent M le lieu du pole de la terre, qui change comme on sait successivement de place dans le Ciel, de sorte qu'il approche tantôt plus tantôt moins du pole de l'écliptique C, outre que son mouvement en longitude selon l'angle ACM n'est pas uniforme. Mais, puisque cette nutation est extrèmement petite, je supposerai ici, que le pole de la terre M tourne également autour du pole de l'écliptique C, duquel il conserve toujours la même distance $CM = q$. Soit donc la longitude du pole de la terre, ou l'angle $ACM = p$, qui dans un an diminue d'environ $50''$: De plus, soit pour l'instant présent ML le premier Méridien de la terre, & posant l'angle $CML = r$, on sait que cet angle va en augmentant de $360°$ dans un jour. Donc, dans un an, l'accroissement de l'angle r sera $= 365\frac{1}{4}.\ 360° = 365\frac{1}{4}.\ 360.\ 60.\ 60''$; d'où il s'ensuit que $dp : dr = -50 : 365\frac{1}{4}.\ 360.\ 60.\ 60$; ou bien $\frac{dr}{dp} = -9467280$; & $\frac{dq}{dp} = 0$. On voit donc que la terre ne tourne pas autour de son axe OM, mais autour d'un autre axe variable ON, dont le point N tombera dans le cercle CMP, puisque, à cause de $dq = 0$, nous avons $\text{tang}\,(r - v) = 0$, & partant $\sin\,(r - v) = 0$, & $\cos\,(r - v) = 1$. De là nous obtiendrons

$$\sin q \cos u - \cos q \sin u = 9467280 \sin u.$$

Donc

Donc $\tan \mu = \tan MN = \frac{\sin q}{9467280 + \cos q}$, & partant la diſtance $MN = 31^{IV}$.

Par conſéquent le point du ciel autour duquel la terre tourne à chaque inſtant n'eſt pas celui qui répond au pole de la terre, mais il en eſt éloigné vers le pole de l'écliptique C d'un intervalle de 34^{IV}, ou de la $\frac{1}{115}$ partie d'une ſeconde.

Soit μ ce point autour duquel la terre tourne dans l'inſtant préſent, le pole étant en M, & ce mouvement de rotation ſera tant ſoit peu différent de celui dont nous concevons que la terre tourne autour de ſon axe, & qui eſt indiqué par $\frac{dr}{dt}$. Car la viteſſe de rotation autour du point μ étant Fig. 3.

$$= \frac{1}{dt} \sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2 - 2\,dp\,dr\cos q)},$$

ſera aſſez exactement $= \frac{dr - dp\cos q}{dt}$: donc poſant la viteſſe de rotation autour du pole $M = \alpha$, celle autour du point μ ſera $= \alpha\left(1 - \frac{dp}{dt}\cos q\right) = 1\frac{1}{10487210}\alpha$, & partant tant ſoit peu plus grande que α. Mais ce mouvement autour du point μ ne dure qu'un inſtant: car, dès que le pole M eſt porté hors du cercle CMP, le mouvement de rotation ſe fera autour d'un autre point, qui ſera alors ſitué au deſſus du pole, vers le pole de l'écliptique C, à une diſtance $= \frac{1}{117}$ d'une ſeconde, & partant dans l'eſpace de 24 heures la terre tournera ſucceſſivement autour de tous les points de la circonférence du petit cercle, décrit du centre M, avec le rayon $= \frac{1}{115}$ ſeconde; & à chaque inſtant la rotation ſe fera autour celui de ces points qui ſe trouvera au deſſus du pole M, vers le pole de l'écliptique C.

Remarque II.

14. Puisqu'il y a toujours un rayon du corps ON, autour duquel le corps tourne à chaque instant, quel que soit le mouvement du corps, nous en tirerons d'abord deux especes de mouvement; l'une, quand le corps tourne constamment autour du même axe, & l'autre, quand cet axe de rotation change à chaque instant. Le mouvement du corps sera donc de la premiere espece, lorsque les expressions trouvées tant pour CN que pour l'angle ACN deviennent constantes; & comme cette espece est fort remarquable, vu qu'elle renferme seule tout ce qu'on a dit presque jusques ici dans la Mécanique, du mouvement des corps solides, il sera à propos de découvrir les caracteres, desquels on puisse d'abord reconnoitre si un cas proposé apartient à cette espece ou non? Posons donc que le corps tourne autour d'un axe fixe ON, & voyons quel rapport doit alors subsister parmi les variables p, q, & r. Soit pour cet effet l'angle ACN $= f$, la distance CN $= h$, & les autres constantes MN $= u$, & l'angle LMN $= v$. Donc, ayant dans le triangle sphérique MCN les trois côtés CM $= q$, CN $= h$, & MN $= u$, on trouvera le rapport suivant des autres variables p & r

$$\operatorname{cos}(r - v) = \frac{\operatorname{cos} h - \operatorname{cos} q \operatorname{cos} u}{\operatorname{sin} q \operatorname{sin} u}, \quad \&$$

$$\operatorname{cos}(f - p) = \frac{\operatorname{cos} u - \operatorname{cos} h \operatorname{cos} q}{\operatorname{sin} h \operatorname{sin} q},$$

& toutes les fois que p & r seront tellement dépendantes des constantes f, h, u, v, & de la variable q, le mouvement de rotation sera de la premiere espece, & se fera autour d'un axe fixe ON, dont la position sera connue par les constantes f & h. De plus ayant:

$$- dr \operatorname{sin}(r - v) = - \frac{dq \operatorname{cos} h \operatorname{cos} q + dq \operatorname{cos} u}{\operatorname{sin} u \operatorname{sin} q^2},$$

$$dp \operatorname{sin}(f - p) = - \frac{dq \operatorname{cos} u \operatorname{cos} q + dq \operatorname{cos} h}{\operatorname{sin} h \operatorname{sin} q^2},$$

puis-

puisque $\sin(r-v)=\frac{\sqrt{(1-\cos h^2-\cos u^2-\cos q^2+2\cos h\cos u\cos q)}}{\sin q\sin u}$,

& $\sin(f-p)=\frac{\sqrt{(1-\cos h^2-\cos u^2-\cos q^2+2\cos h\cos u\cos q)}}{\sin h\sin q}$,

nous aurons:

$$\frac{dr}{dq}=\frac{-\cos u+\cos h\cos q}{\sin q\sqrt{(1-\cos h^2-\cos u^2-\cos q^2+2\cos h\cos u\cos q)}},$$

$$\frac{dp}{dq}=\frac{\cos h-\cos u\cos q}{\sin q\sqrt{(1-\cos h^2-\cos u^2-\cos q^2+\cos h\cos u\cos q)}},$$

d'où par le §. 11. nous trouverons la viteſſe de rotation:

$$=\frac{dq\sin q}{dt\sqrt{(1-\cos h^2-\cos u^2-\cos q^2+2\cos h\cos u\cos q)}},$$

ou bien elle ſera $=\frac{dr\sin q^2}{dt(\cos h\cos q-\cos u)}=\frac{dp\sin q^2}{dt(\cos h-\cos u\cos q)}$

$$=\frac{-dr\sin q}{dt\sin h\cos(f-q)}=\frac{dp\sin q}{dt\sin u\cos(r-v)}.$$

Cette viteſſe de rotation s'exprimera encore plus promptement par l'angle CNM, & on l'aura $=\frac{d.\,CNM}{dt}$; or nous avons

$$\cos CNM=\frac{\cos q-\cos h\cos u}{\sin h\sin u}.$$

Donc, ſi le mouvement de rotation eſt conſtant $=\alpha$, on aura pour ce cas $\alpha=\frac{d.\,CNM}{dt}$, & partant $CNM=\alpha t+\beta$, ou bien

$$\cos q=\cos h\cos u+\sin h\sin u\cos(\alpha t+\beta).$$

Donc, ſi la variable q dépend de cette maniere du tems t, & que les deux autres p & r dépendent de q, comme nous venons de l'indiquer, alors

alors le corps ne tournera pas ſeulement autour d'un axe fixe, mais ſon mouvement de rotation ſera auſſi uniforme $= \alpha$.

PROBLEME III.

15. *Le mouvement du corps qui tourne autour de ſon centre de gravité O, étant ſuppoſé quelconque, trouver les forces dont chacun de ſes élémens doit être ſollicité, pour que le corps ſoit mis en état de pourſuivre ſon mouvement.*

SOLUTION.

Fig. 1. Dès que les trois quantités $ACM = p$, $CM = q$, & $CML = r$, marquent des fonctions déterminées du tems t, le mouvement du corps ſera auſſi déterminé: car de là on pourra pour tout tems propoſé, aſſigner le lieu du pole M, & la poſition du Méridien ML, d'où l'on connoit en quels points ſe trouveront les élémens du corps: & partant on en connoitra auſſi leur mouvement. Qu'on conſidere donc un élément du corps quelconque Z, pour la ſituation duquel à l'égard de l'axe OM, & du Méridien, ſoit $OZ = s$, $MN = u$, & $LMN = v$. Enſuite, qu'on rapporte auſſi ce point Z aux trois coordonnées orthogonales $OX = x$, $XY = y$, & $YZ = z$, dont les directions ſont fixes, & indépendantes du mouvement du corps: car, pour trouver les forces requiſes, il faut toujours décompoſer le mouvement ſuivant des directions fixes. Donc, ſi nous décompoſons le mouvement de l'élément Z ſuivant ces trois directions, nous aurons:

ſa viteſſe ſelon la direction $OX = \frac{dx}{dt}$,

ſa viteſſe ſelon la direction $XY = \frac{dy}{dt}$,

ſa viteſſe ſelon la direction $YZ = \frac{dz}{dt}$,

&

& suivant ces mêmes directions il faut que l'élément Z soit sollicité par des forces accélératrices, qui seront

la force accélératrice selon OX $= \frac{2\,ddx}{dt^2}$,

la force accélératrice selon XY $= \frac{2\,ddy}{dt^2}$,

la force accélératrice selon YZ $= \frac{2\,ddz}{dt^2}$,

où, en prenant ces différentio différentiels, on suppose l'élément du tems dt constant. Or les quantités x, y, z, ne sont variables, qu'entant qu'elles renferment les quantités p, q, r, qui sont des fonctions du tems t; car s, u, & v, sont constantes tant qu'on considere le même point Z. Pour trouver ces différentiels, il faut donc prendre les valeurs de x, y, & z, trouvées ci-dessus (3); or, pour rendre les expressions plus courtes, posons

$\sin(r - v)\sin u = K$; $\quad \cos(r - v)\sin u = L$,

$\sin q \cos u - \cos(r - v)\cos q \sin u = M$,

$\cos q \cos u + \cos(r - v)\sin q \sin u = N$,

& nous aurons:

$$\frac{x}{s} = M\cos p - K\sin p,$$

$$\frac{y}{s} = M\sin p + K\cos p,$$

$$\frac{z}{s} = N.$$

Maintenant, pour trouver les différentiels, puisque u & v & s sont des quantités constantes, nous aurons:

$dK = L\,dr$; $\quad dL = -K\,dr$,

$dM = N\,dq + K\,dr\cos q$, & $dN = -M\,dq - K\,dr\sin q$,

&

& partant nous obtiendrons:

$$\frac{dx}{s} = -\frac{ydp}{s} + Ndq\cos p + Kdr\cos p\cos q - Ldr\sin p,$$

$$\frac{dy}{s} = \frac{xdp}{s} + Ndq\sin p + Kdr\sin p\cos q + Ldr\cos p,$$

$$\frac{dz}{s} = -Mdq - Kdr\sin q.$$

Passons de là aux seconds différentiels, & nous trouverons

$$\begin{aligned}\frac{ddx}{s} = & -\frac{yddp}{s} - \frac{xdp^2}{s} - Ndpdq\sin p - Kdpdr\sin p\cos q - Ldpdr\cos p \\ & + Nddq\cos p - Mdq^2\cos p - Ndpdq\sin p - Kdpdr\sin p\cos q - Ldpdr\cos p \\ & + Kddr\cos p\cos q + Ldr^2\cos p\cos q \qquad - Kdqdr\cos p\sin q \\ & - Lddr\sin p \qquad + Kdr^2\sin p \qquad - Kdqdr\cos p\sin q\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}\frac{ddx}{s} = & -\frac{yddp}{s} + Nddq\cos q + ddr(K\cos p\cos q - L\sin p) \\ & -\frac{xdp^2}{s} - Mdq^2\cos p + dr^2(L\cos p\cos q + K\sin p) \\ & - 2Ndpdq\sin p - 2Kdpdr\sin p\cos q - 2Kdqdr\cos p\sin q \\ & - 2Ldpdr\cos p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{ddy}{s} = & \frac{xddp}{s} + Nddq\sin p + ddr(K\sin p\cos q + L\cos p) \\ & -\frac{ydp^2}{s} - Mdq^2\sin p + dr^2(L\sin p\cos q - K\cos p) \\ & + 2Ndpdq\cos p + 2Kdpdr\cos p\cos q - 2Kdqdr\sin p\sin q \\ & - 2Ldpdr\sin p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{ddz}{s} = & -Mddq - Kddr\sin q \\ & - Ndq^2 - Ldr^2\sin q - 2Kdqdr\cos q.\end{aligned}$$

Donc

Donc les forces accélératrices de l'élément Z seront:

$$\text{I. selon OX} = \frac{2s}{dt^2}\begin{cases} -\dfrac{y\,ddp}{s} + N\,ddq\cos p + ddr(K\cos p\cos q - L\sin p) \\ -\dfrac{x\,dp^2}{s} - M\,dq^2\cos p + dr^2(L\cos p\cos q + K\sin q) \\ -2N\,dp\,dq\sin p - 2\,dp\,dr(K\sin p\cos q + L\cos p) - 2K\,dq\,dr\cos p\sin q \end{cases}$$

$$\text{II. selon XY} = \frac{2s}{dt^2}\begin{cases} \dfrac{x\,ddp}{s} + N\,ddq\sin p + ddr(K\sin p\cos q + L\cos p) \\ -\dfrac{y\,dp^2}{s} - M\,dq^2\sin p + dr^2(L\sin p\cos q - K\cos p) \\ +2N\,dp\,dq\cos p + 2\,dp\,dr(K\cos p\cos q - L\sin p) - 2K\,dq\,dr\sin p\sin q \end{cases}$$

$$\text{III. selon YZ} = \frac{2s}{dt^2}\begin{cases} -M\,ddq - K\,ddr\sin q \\ -N\,dq^2 - L\,dr^2\sin q - 2K\,dq\,dr\cos q \end{cases}$$

C o r o l l a i r e I.

16. Les deux premieres forces selon OZ & selon XY, dont les expressions sont assez compliquées, deviennent plus simples par la combinaison: car nous aurons

$$\text{force OX}\cos p + \text{force XY}\sin p = \frac{2s}{dt^2}\begin{cases} -K\,ddp + N\,ddq + K\,ddr\cos q \\ -M\,dp^2 - M\,dq^2 + L\,dr^2\cos q \\ -2L\,dp\,dr - 2K\,dq\,dr\sin q \end{cases}$$

$$\text{force OX}\sin p - \text{force XY}\cos p = \frac{2s}{dt^2}\begin{cases} -M\,ddp - L\,ddr \\ -K\,dp^2 - K\,dr^2 \\ -2N\,dp\,dq - 2K\,dp\,dr\cos q \end{cases}$$

C o r o l l a i r e II.

17. Or, si nous tirons la droite OP, & que nous y tirions du point Y la perpendiculaire YV, pour rapporter l'élément Z aux

trois

trois coordonnées OV, VY, & YZ: nous pourrons réduire les deux forces trouvées ſuivant OX & XY à deux autres ſuivant OV & VY; & à cauſe de l'angle AOP $= p$, la force ſelon OV ſera $=$ force OX $\text{coſ}\,p$ $+$ force XY. $\text{ſin}\,p$; & la force ſelon VY $=$ force XY $\text{coſ}\,p$ $-$ force OX $\text{ſin}\,p$.

COROLLAIRE III.

18. Donc les forces accélératrices, dont l'élément Z doit être ſollicité, ſe réduiront auſſi aux trois forces ſuivantes

$$\text{I. ſelon OV} = \frac{2s}{dt^2}\left\{\begin{matrix} -\mathrm{K}ddp+\mathrm{N}ddq+\mathrm{K}ddr\,\text{coſ}\,q-\mathrm{M}dp^2-\mathrm{M}dq^2 \\ +\mathrm{L}dr^2\,\text{coſ}\,q-2\mathrm{L}dpdr-2\mathrm{K}dqdr\,\text{ſin}\,q \end{matrix}\right]$$

$$\text{II. ſelon VY} = \frac{2s}{dt^2}\left\{\begin{matrix} \mathrm{M}ddp+\mathrm{L}ddr-.\mathrm{K}dp^2-\mathrm{K}dr^2 \\ +2\mathrm{N}dpdq+2\mathrm{K}dpdr\,\text{coſ}\,q \end{matrix}\right]$$

$$\text{III. ſelon YZ} = \frac{2s}{dt^2}\left\{\begin{matrix} -\mathrm{M}ddq-\mathrm{K}ddr\,\text{ſin}\,q-\mathrm{N}dq^2-\mathrm{L}dr^2\,\text{ſin}\,q \\ -2\mathrm{K}dqdr\,\text{coſ}\,q \end{matrix}\right]$$

COROLLAIRE IV.

19. Si nous menons ſur l'horizon le rayon OR perpendiculaire au rayon OP, pour avoir trois axes OP, OR, OC perpendiculaires entr'eux, l'élément Z ſera ſollicité par trois forces dont les directions ſont paralleles à ces trois axes OP, OR, & OC, & ces trois forces ſeront les mêmes que celles qui ont été marquées dans le corollaire précédent.

PROBLEME IV.

Fig. 4. 20. *Les trois forces, dont l'élément* Z *eſt ſollicité, étant trouvées ſuivant trois directions* OP, OR, OC, *perpendiculaires entr'elles, réduire les mêmes forces à trois autres directions* OM, OS, OT, *qui ſont auſſi perpendiculaires entr'elles & qui dépendent du premier Méridien* OML *du corps.*

SOLU-

SOLUTION.

Soient F, G, H, les forces, dont l'élément Z eſt ſollicité ſuivant les directions OP, OR, & OC; & on ſait par les principes de la Statique, que les trois forces cherchées ſelon les nouvelles directions OM, OS, OT, ſeront exprimées de la maniere ſuivante, concevant que les points P, R, C, M, S, T, ſont joints enſemble par des arcs des grands cercles:

$$\text{Force ſelon } OM = F \cos PM + G \cos RM + H \cos CM,$$
$$\text{Force ſelon } OS = F \cos PS + G \cos RS + H \cos CS,$$
$$\text{Force ſelon } OT = F \cos PT + G \cos RT + H \cos CT,$$

Maintenant, pour trouver ces coſinus, que le premier Méridien du corps OMS, dans lequel ſe trouvent deux de ces dernieres directions OM & OS, coupe l'horizon au point L, & poſant $PL = f$; $PLM = g$, & $LM = h$, on trouvera par les regles de la trigonométrie ſphérique.

$$\cos CT = \cos g$$
$$\cos PT = -\sin f \sin g$$
$$\cos RT = \cos f \sin g$$
$$\cos CM = \sin g \sin h$$
$$\cos CS = -\sin g \cos h$$
$$\cos PM = \cos f \cos h + \cos g \sin f \sin h$$
$$\cos RM = \sin f \cos h - \cos g \cos f \sin h$$
$$\cos PS = \cos f \sin h - \cos g \sin f \cos h$$
$$\cos RS = \sin f \sin h + \cos g \cos f \cos h.$$

Or, ayant pour notre cas $CM = q$, & $CML = r$, il y aura

$$\cos g = \sin q \sin r; \quad \tang f = \frac{-\cos q \sin r}{\cos r}, \quad \& \quad \tang h = \frac{-\cos q}{\sin q \sin r},$$

& ſubſtituant ces valeurs, nous obtiendrons :

$\cos CT = \sin q \sin r$

$\cos PT = -\cos q \sin r$

$\cos RT = -\cos r$

$\cos CM = \cos q$

$\cos CS = \sin q \cos r$

$\cos PM = \sin q$

$\cos RM = 0,$

$\cos PS = -\cos q \cos r$

$\cos RS = \sin r$

& les trois forces accélératrices F, G, H, ont été trouvées

$$F = \frac{2s}{dt^2}\left\{\begin{array}{l} -K\,ddp + N\,ddq + K\,ddr\cos q - M\,dp^2 - M\,dq^2 \\ \quad + L\,dr^2\cos q - 2L\,dp\,dr - 2K\,dq\,dr\sin q \end{array}\right)$$

$$G = \frac{2s}{dt^2}\left\{M\,ddp + L\,ddr - K\,dp^2 - K\,dr^2 + 2N\,dp\,dq + 2K\,dp\,dr\cos q\right)$$

$$H = \frac{2s}{dt^2}\left\{-M\,ddq - K\,ddr\sin q - N\,dq^2 - L\,dr^2\sin q - 2K\,dq\,dr\cos q\right)$$

Et partant, ayant ſubſtitué ces valeurs, les forces accélératrices cherchées ſuivant les trois directions OM, OS, & OT, ſeront

$$\text{I. ſelon } OM = \frac{2s}{dt^2}\left\{\begin{array}{l} -K\,ddp\sin q + L\,ddq - M\,dp^2\sin q - dq^2\cos u \\ \quad - 2L\,dp\,dr\sin q - 2K\,dq\,dr \end{array}\right]$$

$$\text{II. ſelon } OS = \frac{2s}{dt^2}\left\{\begin{array}{l} +ddp(K\cos q\cos r + M\sin r) - ddq\cos r\cos u + ddr\sin u\sin v \\ \quad + dp^2(M\cos q\cos r - K\sin r) - L\,dq^2\cos r - dr^2\sin u\cos v \\ \quad + 2N\,dp\,dq\sin r + 2\,dp\,dr\sin u\cos v\cos q \end{array}\right]$$

$$\text{III. ſelon } OT = \frac{2s}{dt^2}\left\{\begin{array}{l} +ddp(K\cos q\sin r - M\cos r) - ddq\sin r\cos u - ddr\sin u\cos v \\ \quad + dp^2(M\cos q\sin r + K\cos r) - L\,dq^2\sin r - dr^2\sin u\sin v \\ \quad - 2N\,dp\,dq\cos r + 2\,dp\,dr\sin u\sin v\cos q \end{array}\right]$$

COROL-

COROLLAIRE I.

21. Les deux dernieres forces donnent par une double combinaiſon:

$$\text{force}\,OS\cos r + \text{force}\,OT\sin r = \frac{2s}{dt^2}\left\{\begin{array}{l} Kddq\,\text{cſ}q - ddq\,\text{cſ}u - ddr\sin u\sin(r-v) \\ + Mdp^2\,\text{cſ}q - Ldq^2 - dr^2\sin u\,\text{cſ}(r-v) \\ + 2dpdr\sin u\cos q\cos(r-v) \end{array}\right\}$$

$$\text{force}\,OS\sin r - \text{force}\,OT\cos r = \frac{2s}{dt^2}\left\{\begin{array}{l} Mddp + ddr\sin u\cos(r-v) - Kdp^2 \\ - dr^2\sin u\sin(r-v) + 2Ndpdq \\ + 2dpdr\sin u\cos q\sin(r-v) \end{array}\right\}$$

COROLLAIRE II.

22. Mais il vaudra mieux garder dans le calcul les forces accélératrices ſelon les directions OM, OS, & OT, qui ſont fixes par rapport au corps, puisque OM eſt ſon axe, MOS le plan de ſon Méridien, & OT eſt perpendiculaire à ce plan. Donc, ſi nous rapportons l'élément du corps Z à ces trois axes, & que nous nommions les trois coordonnées $OX = x$, $XY = y$, & $YZ = z$, nous aurons: Fig. 5.

$$x = s\cos u, \quad y = s\sin u\cos v, \quad \& \quad z = s\sin u\sin v,$$

où il ne faut pas confondre ces coordonnées avec celles qui ont été conſidérées ci-deſſus.

COROLLAIRE III.

23. Introduiſons maintenant, au lieu des angles u & v, les coordonnées x, y, z, & ayant:

$$K = \frac{y}{s}\sin r - \frac{z}{s}\cos r; \qquad L = \frac{y}{s}\cos r + \frac{z}{s}\sin r,$$

$$M = \frac{x}{s}\sin q - \frac{y}{s}\cos q\cos r - \frac{z}{s}\cos q\sin r,$$

$$N = \frac{x}{s}\cos q + \frac{y}{s}\sin q\cos r + \frac{z}{s}\sin q\sin r,$$

nous

nous aurons la force

$$\text{I. ſelon OM} = \frac{2}{dt^2}\left\{\begin{array}{l} -ddp \sin q\,(y \sin r - z \cos r) + ddq\,(y \cos r + z \sin r) \\ -dp^2 \sin q\,(x \sin q - y \cos q \cos r - z \cos q \sin r) - x dq^2 \\ -2dpdr \sin q\,(y \cos r + z \sin r) - 2dqdr\,(y \sin r - z \cos r) \end{array}\right]$$

$$\text{II. ſelon OS} = \frac{2}{dt^2}\left\{\begin{array}{l} +ddp\,(x \sin q \sin r - z \cos q) - x ddq \cos r + z ddr \\ +dp^2 (x \sin q \cos q \cos r - y(1 - \sin q^2 \cos r^2) + z \sin q^2 \sin r \cos r) \\ -dq^2 \cos r\,(y \cos r + z \sin r) - y dr^2 \\ +2dpdq \sin r (x \cos q + y \sin q \cos r + z \sin q \sin r) + 2y dpdr \cos q \end{array}\right]$$

$$\text{III. ſelon OT} = \frac{2}{dt^2}\left\{\begin{array}{l} +ddp\,(y \cos q - x \sin q \cos r) - x ddq \sin r - y ddr \\ +dp^2 (x \sin q \cos q \sin r + y \sin q^2 \sin r \cos r - z(1 - \sin q^2 \sin r^2)) \\ -dq^2 \sin r\,(y \cos r + z \sin r) - z dr^2 \\ -2dpdq \cos r (x \cos q + y \sin q \cos r + z \sin q \sin r) + z dpdr \cos q \end{array}\right]$$

PROBLEME V.

24. *Trouver les moments des forces, dont l'élément* Z *eſt ſollicité, par rapport aux trois axes* OM, OS, OT, *qui conſervent toujours la même ſituation à l'égard du corps.*

SOLUTION.

Ayant trouvé les forces accélératrices, dont l'élément Z eſt ſollicité ſuivant la direction des trois axes OM, OS, OT, ſoient P, Q, R, ces forces, & poſant la maſſe de l'élément du corps en Z $= dM$, les forces motrices ſeront PdM, QdM, RdM. Donc, puisque les forces motrices ſont: I. ſelon la direction OM $= PdM$, II. ſelon OS $= QdM$, & III. ſelon OT $= RdM$, & qu'elles ſont appliquées au point Z, il en réſultera les moments ſuivans:

Le moment autour de l'axe OT dans le ſens MS:

$$xQdM - yPdM,$$

Le moment autour de l'axe OS dans le ſens MT

$$xRdM - zPdM,$$

Le moment autour de l'axe OM dans le ſens ST

$$yRdM - zQdM.$$

Subſtituons pour P, Q, & R, leurs valeurs trouvées dans §. 23. & nous trouverons pour ces momens les expreſſions ſuivantes.

I. Le moment autour de l'axe OM dans le ſens ST

$$\frac{2dM}{dt^2}\left\{\begin{array}{l}
+(yy+zz)ddp\cos q - xyddp\sin q\cos r - xzddp\sin q\sin r \\
- xyddq\sin r + xzddq\cos r - (yy+zz)ddr \\
+(yy-zz)dp^2\sin q^2\sin r\cos r + xydp^2\sin q\cos q\sin r - xzdp^2\sin q\cos q\cos r \\
-yzdp^2\sin q^2(\cos r^2 - \sin r^2) - (yy-zz)dq^2\sin r\cos r + yzdq^2(\cos r^2 - \sin r^2) \\
-2yydpdq\sin q\cos r^2 - 2zzdpdq\sin q\sin r^2 - 4yzdpdq\sin q\sin r\cos r \\
-2xydpdq\cos q\cos r - 2xzdpdq\cos q\sin r
\end{array}\right.$$

II. Le moment autour de l'axe OS dans le ſens MT

$$\frac{2dM}{dt^2}\left\{\begin{array}{l}
-(xx+zz)ddp\sin q\cos r + xyddp\cos q + yzddp\sin q\sin r \\
-(xx+zz)ddq\sin r - yzddq\cos r - xyddr - yzdp^2\sin q\cos q\cos r \\
+(xx-zz)dp^2\sin q\cos q\sin r + xydp^2\sin q^2\sin r\cos r - xzdp^2(\cos q^2 - \sin q^2\sin r^2) \\
- xydq^2\sin r\cos r + xzdq^2\cos r^2 - xzdr^2 \\
-2xxdpdq\cos q\cos r - 2xydpdq\sin q\cos r^2 - 2xzdpdq\sin q\sin r\cos r \\
+2zzdpdr\sin q\sin r + 2xzdpdr\cos q + 2yzdpdr\sin q\cos r \\
-2zzdqdr\cos r + 2yzdqdr\sin r
\end{array}\right.$$

III. Le moment autour de l'axe OT dans le sens MS

$$\frac{2dM}{dt^2}\left\{\begin{array}{l}
+ (xx+yy)\,ddp \sin q \sin r - xz\,ddp \cos q - yz\,ddp \sin q \cos r \\
-(xx+yy)\,ddq \cos r - yz\,ddq \sin r + xz\,ddr - yz\,dp^2 \sin q \cos q \sin r \\
+(xx-yy)\,dp^2 \sin q \cos q \cos r - xy\,dp^2 (\cos q^2 - \sin q^2 \cos r^2) + xz\,dp^2 \sin q^2 \sin r \cos r \\
+ xy\,dq^2 \sin r^2 - xz\,dq^2 \sin r \cos r - xy\,dr^2 \\
+ 2xx\,dp\,dq \cos q \sin r + 2xy\,dp\,dq \sin q \sin r \cos r + 2xz\,dp\,dq \sin q \sin r^2 \\
+ 2yy\,dp\,dr \sin q \cos r + 2xy\,dp\,dr \cos q + 2yz\,dp\,dr \sin q \sin r \\
+ 2yy\,dq\,dr \sin r - 2yz\,dq\,dr \cos r
\end{array}\right.$$

PROBLEME VI.

25. *Pour que le corps puisse poursuivre le mouvement, qui est indiqué par les quantités* p, q, r, *déterminer les momens des forces requises, dont le corps doit être sollicité.*

SOLUTION.

Ayant trouvé les moments élémentaires, que le mouvement de l'élément du corps dM situé en Z exige, on n'a qu'à prendre les intégrales de ces expressions différentielles. Or, pendant que nous considérons le point Z comme variable, les autres quantités qui dépendent du tems demeureront constantes. Nous n'avons donc dans cette recherche d'autres variables que les coordonnées x, y, z, avec l'élément du corps dM, qui sont tellement indépendantes du tems t, que, quel que soit le mouvement du corps, elles demeurent les mêmes, puisqu'elles se rapportent aux trois axes OM, OS, OT, fixés dans le corps. Soit donc M la masse du corps entier, & qu'on cherche de la nature du corps les valeurs intégrales suivantes:

$$\int xx\,dM = Mff, \qquad \int xy\,dM = Mll,$$
$$\int yy\,dM = Mgg, \qquad \int xz\,dM = Mmm,$$
$$\int zz\,dM = Mhh, \qquad \int yz\,dM = Mnn,$$

Cela

Cela poſé, les momens des forces requiſes pour conſerver le corps dans le mouvement, que les quantités p, q, r, renferment, ſeront:

I. Le moment autour de l'axe OM dans le ſens ST

$$\frac{2M}{dt^2}\left\{\begin{array}{l}
+(gg+hh)ddp\cos q - llddp\sin q\cos r - mmddp\sin q\sin r\\
- llddq\sin r + mmddq\cos r - (gg+hh)ddr\\
+(gg-hh)dp^2\sin q^2\sin r\cos r + lldp^2\sin q\cos q\sin r - mmdp^2\sin q\cos q\cos r\\
- nndp^2\sin q^2(\cos r^2-\sin r^2) - (gg-hh)dq^2\sin r\cos r + nndq^2(\cos r^2-\sin r^2)\\
- 2ggdpdq\sin q\cos r^2 - 4nndpdq\sin q\sin r\cos r - 2hhdpdq\sin q\sin r^2\\
- 2lldpdq\cos q\cos r - 2mmdpdq\cos q\sin r
\end{array}\right.$$

II. Le moment autour de l'axe OS dans le ſens MT

$$\frac{2M}{dt^2}\left\{\begin{array}{l}
-(ff+hh)ddp\sin q\cos r + llddp\cos q + nnddp\sin q\sin r\\
-(ff+hh)ddq\sin r - nnddq\cos r - llddr - nndp^2\sin q\cos q\cos r\\
+(ff-hh)dp^2\sin q\cos q\sin r + lldp^2\sin q^2\sin r\cos r - mmdp^2(\cos q^2-\sin q^2\sin r^2)\\
- lldq^2\sin r\cos r + mmdq^2\cos r^2 - mmdr^2\\
- 2ffdpdq\cos q\cos r - 2lldpdq\sin q\cos r^2 - 2mmdpdq\sin q\sin r\cos r\\
+ 2hhdpdr\sin q\sin r + 2mmdpdr\cos q + 2nndpdr\sin q\cos r\\
- 2hhdqdr\cos r + 2nndqdr\sin r
\end{array}\right.$$

III. Le moment autour de l'axe OT dans le ſens MS

$$\frac{2M}{dt^2}\left\{\begin{array}{l}
+(ff+gg)ddp\sin q\sin r - mmddp\cos q - nnddp\sin q\cos r\\
-(ff+gg)ddq\cos r - nnddq\sin r + mmddr - nndp^2\sin q\cos q\sin r\\
+(ff-gg)dp^2\sin q\cos q\cos r + mmdp^2\sin q^2\sin r\cos r - lldp^2(\cos q^2-\sin q^2\cos r^2)\\
+ lldq^2\cos r^2 - mmdq^2\sin r\cos r - lldr^2\\
+ 2ffdpdq\cos q\sin r + 2lldpdq\sin q\sin r\cos r + 2mmdpdq\sin q\sin r^2\\
+ 2lldpdr\cos q + 2ggdpdr\sin q\cos r + 2nndpdr\sin q\sin r\\
+ 2ggdqdr\sin r - 2nndqdr\cos r
\end{array}\right.$$

Corollaire I.

26. Nous voyons donc, lorsque le mouvement du corps autour de ſon centre de gravité O eſt propoſé, quels momens de forces ſont requis pour entretenir le corps dans ce mouvement. Car la connoiſſance du mouvement nous donne à connoitre les quantités p, q, r, qui ſont fonctions du tems t; & de la nature du corps même nous trouvons les quantités ff, gg, hh, ll, mm, & nn, indépendemment de ſon mouvement.

Corollaire II

27. Puisque la nature du centre de gravité n'eſt pas encore introduite dans le calcul, il eſt clair que les momens de forces trouvés peuvent être appliqués au mouvement de tous les corps qui tournent autour d'un point fixe, quoique ce ne ſoit point leur centre de gravité; pourvu que ce point demeure immobile.

Corollaire III,

28. Or ſi le point O eſt le centre de gravité du corps la nature du centre de gravité nous fournit ces formules

$$\int x\,dM = 0; \quad \int y\,dM = 0; \quad \& \quad \int z\,dM = 0,$$

Donc, comme ces formules n'entrent point dans les expreſſions que nous venons de trouver pour les moments des forces, il eſt clair que rien n'empêche, que le point immobile O autour duquel le corps tourne, ne ſoit pris hors du centre de gravité du corps.

Corollaire IV.

29. Auſſitôt que le corps a quelque étendue, les quantités ff, gg, hh, auront des valeurs poſitives; qui ne ſauroient jamais ni évanouir, ni devenir négatives. Or, pour les valeurs ll, mm, nn, elles peuvent bien ſelon la nature du corps, ou être affirmatives, ou évanouir, ou devenir négatives.

Remar-

Remarque I.

30. Ces expressions étant fort compliquées, il sera à propos d'introduire, au lieu des trois variables p, q, r, trois autres qui en sont déterminées, & par lesquelles nos expressions deviennent plus simples. Pour cet effet je pose:

$$dp \sin q \cos r + dq \sin r = P dt$$
$$dp \sin q \sin r - dq \cos r = Q dt$$
$$dp \cos q - dr = R dt$$

& alors nous trouverons les expressions suivantes:

I. Le moment autour de l'axe OM dans le sens ST

$$2M\left\{\begin{array}{l} +gg\left(\frac{dR}{dt}+PQ\right)+hh\left(\frac{dR}{dt}-PQ\right) \\ -ll\left(\frac{dP}{dt}-QR\right)-mm\left(\frac{dQ}{dt}+PR\right)-nn(PP-QQ) \end{array}\right]$$

II. Le moment autour de l'axe OS dans le sens MT:

$$2M\left\{\begin{array}{l} -ff\left(\frac{dP}{dt}-QR\right)-hh\left(\frac{dP}{dt}+QR\right) \\ -ll\left(\frac{dR}{dt}+PQ\right)+mm(QQ-RR)+nn\left(\frac{dQ}{dt}-PR\right) \end{array}\right]$$

III. Le moment autour de l'axe OT dans le sens MS

$$2M\left\{\begin{array}{l} +ff\left(\frac{dQ}{dt}+PR\right)+gg\left(\frac{dQ}{dt}-PR\right) \\ +ll(PP-RR)-mm\left(\frac{dR}{dt}-PQ\right)-nn\left(\frac{dP}{dt}+QR\right) \end{array}\right]$$

Et partant, par le moyen de ces substitutions, en introduisant les lettres P, Q, R, au lieu des p, q, r, nos formules deviennent non seule-

 ment

ment conſidérablement plus ſimples, mais on y remarque auſſi une uniformité fort belle, par laquelle nous voyons que ces trois nouvelles quantités entrent également dans la détermination de nos trois moments. Cette régularité ſert auſſi de preuve pour juſtifier le calcul que je viens de déveloper.

Remarque II.

31. Je remarque de plus, que ces trois nouvelles quantités ont un fort beau rapport avec le rayon ON autour duquel le corps tourne à chaque inſtant, en ſorte que ce rayon demeure immobile pendant cet inſtant. Car, poſant pour la ſituation de ce rayon à l'égard du corps l'angle MON $= u$, & l'angle LMN $= v$, nous avons trouvé ci-deſſus dans le ſecond probleme

$$\sin(r-v) = \sin r \cos v - \cos r \sin v = \frac{dq}{\sqrt{(dp^2 \sin q^2 + dq^2)}} = \frac{dq}{dt\sqrt{(PP+QQ)}},$$

$$\cos(r-v) = \cos r \cos v + \sin r \sin v = \frac{dp \sin q}{\sqrt{(dp^2 \sin q^2 + dq^2)}} = \frac{dp \sin q}{dt\sqrt{(PP+QQ)}},$$

d'où nous tirons

$$\frac{P}{\sqrt{(PP + QQ)}} = \cos v, \quad \& \quad \frac{Q}{\sqrt{(PP + QQ)}} = \sin v,$$

Enſuite nous avions

$$\operatorname{tang} u = \frac{\sqrt{(dp^2 \sin q^2 + dq^2)}}{dp \cos q - dr} = \frac{\sqrt{(PP + QQ)}}{R},$$

Donc, connoiſſant les quantités P, Q, R, nous pourrons aiſément aſſigner dans le corps le rayon ON, autour duquel le corps tourne à à chaque inſtant. Mais de plus, il ſera auſſi aiſé de déterminer le mouvement de rotation, ou la viteſſe angulaire avec laquelle le corps tourne autour de cet axe ON: car cette viteſſe ayant été trouvée $=$ $\frac{1}{dt}\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2 - 2\,dp\,dr \cos q}$, nous aurons

$$\text{la viteſſe de rotation} = \sqrt{(PP + QQ + RR)},$$

&

& c'est en quoi consiste une fort belle maniere de se former une idée distincte du mouvement du corps, après avoir trouvé les trois fonctions P, Q, R.

PROBLEME VII.

32. *Parmi tous les mouvemens dont le corps est susceptible autour du point* O, *trouver les caracteres de ceux qui se font autour d'un axe immobile.*

SOLUTION.

Ayant trouvé le mouvement d'un corps proposé autour du point O, par les fonctions du tems p, q, r, il n'est pas si aisé de reconnoitre, si ce mouvement se fait autour d'un axe fixe ou non; car on en devroit chercher pour chaque moment le rayon autour duquel se fait la rotation, & voir si ce rayon demeure pour tout tems le même. Mais, ayant introduit les quantités P, Q, R, au lieu de p, q, r, ce jugement, si le mouvement se fait autour d'un axe immobile ou non? devient fort aisé. Car on cherchera le rayon ON, autour duquel le corps tourne à chaque instant; qui étant déterminé à l'égard du corps par les angles MON $= u$, & LMN $= v$, il est clair que cet axe ON demeure immobile, lorsque ces deux angles u & v demeureront constans. Or nous avons trouvé.

$$\sin v = \frac{Q}{\sqrt{(PP + QQ)}}; \quad \cos v = \frac{P}{\sqrt{(PP + QQ)}},$$

$$\text{\& partant } \tang v = \frac{Q}{P}, \quad \text{\& de plus } \tang u = \frac{\sqrt{(PP + QQ)}}{R};$$

d'où l'on voit que l'axe de rotation demeurera toujours le même, lorsque les trois quantités P, Q, R, auront un rapport constant entr'elles: & c'est en quoi consiste le caractere du mouvement autour d'un axe immobile. Donc, pour cette espece de mouvement, nous aurons:

$$P = \alpha S; \qquad Q = \beta S; \qquad \& \quad R = \gamma S,$$

les

les lettres α, β, γ, marquant des quantités conſtantes quelconques; car alors l'axe de rotation fixe ON ſera déterminé en ſorte:

$$\text{tang}\, \nu = \text{tang}\, LMN = \frac{\beta}{\alpha};$$

$$\&\ \text{tang}\, u = \text{tang}\, MON = \frac{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}{\gamma}.$$

De plus, la viteſſe de rotation ſera $= S\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)}$: & partant, pour que le mouvement de rotation ſoit uniforme, il faut que la quantité S ſoit auſſi conſtante auquel cas les trois quantités P, Q, R, auront entr'elles non ſeulement des rapports conſtans, mais elles ſeront auſſi conſtantes elles-mêmes.

COROLLAIRE I.

33. Donc, après avoir déterminé le mouvement d'un corps autour du point fixe O, ſi l'on trouve que les quantités P, Q, R, ont entr'elles des rapports conſtans, ce ſera une marque que le mouvement du corps ſe fait autour d'un axe fixe; & quand ces mêmes quantités ſeront outre cela conſtantes, le mouvement de rotation ſera uniforme.

COROLLAIRE II.

34. Les momens des forces requiſes pour produire un tel mouvement de rotation, ſe tireront aiſément de nos formules générales, en poſant $P = \alpha S$, $Q = \beta S$, & $R = \gamma S$; car alors nous aurons:

I. Le moment autour de l'axe OM dans le ſens ST

$$\frac{2MdS}{dt}(\gamma gg + \gamma hh - \alpha ll - \beta mm)$$
$$+ 2MSS(\alpha\beta gg - \alpha\beta hh + \beta\gamma ll - \alpha\gamma mm - (\alpha\alpha - \beta\beta)nn).$$

II. Le

II. Le moment autour de l'axe OS dans le ſens MT

$$\frac{2MdS}{dt}(-\alpha ff-\alpha hh+\gamma ll+\beta nn)$$
$$+2MSS(\beta\gamma ff-\beta\gamma hh+\alpha\beta l+(\beta\beta-\gamma\gamma)mm-\alpha\gamma nn).$$

III. Le moment autour de l'axe OT dans le ſens MS

$$\frac{2MdS}{dt}(\beta ff+\beta gg-\gamma mm-\alpha nn)$$
$$+2MSS(\alpha\gamma ff-\alpha\gamma gg+(\alpha\alpha-\gamma\gamma)ll+\alpha\beta mm-\beta\gamma nn).$$

COROLLAIRE III.

35. Or, quand nous avons $P=\alpha S$, $Q=\beta S$, $R=\gamma S$, quoique ce cas ſoit fort ſimple, il eſt pourtant difficile d'en tirer les valeurs des lettres p, q, r, qui déterminent le mouvement du point M, moyennant ces trois équations:

$$dp\sin q\cos r+dq\sin r=\alpha Sdt,$$
$$dp\sin q\sin r+dq\cos r=\beta Sdt,$$
$$dp\cos q\quad-dr\quad=\gamma Sdt,$$

puisque les trois variables p, q, r, ſont tellement mêlées entr'elles, que leur réſolution demande une très grande adreſſe.

COROLLAIRE IV.

36. Cependant, puisque le point N eſt immobile, qu'on poſe $CN=k$, & l'angle $CNM=\phi$; dont le différentiel étant égal au mouvement angulaire, nous aurons

$$d\phi=Sdt\sqrt{(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)},\quad\&\quad\phi=\int Sdt\sqrt{(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)}.$$

Or, ayant trouvé cet angle ϕ, nous en obtiendrons

$$\cos CM=\cos q=\cos\phi\sin k\sin u+\cos k\cos u;$$

ou bien $\cos q=\dfrac{\cos\phi\sin k.\sqrt{(\alpha\alpha+\beta\beta)}+\gamma\cos k}{\sqrt{(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)}}$,

COROLLAIRE V.

37. De plus, la résolution du même triangle CMN nous fournira

$$\tang CMN = \tang(r - v) = \frac{\cos k \sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)} - \gamma \cos\phi \sin k}{\sin\phi \sin k},$$

& posant l'angle ACN $= \zeta$, qui est aussi constant:

$$\tang MCN = \tang(\zeta - p) = \frac{\gamma \sin k - \cos\phi \cos k \sqrt{(\alpha\alpha - \beta\beta)}}{\sin\phi \sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}.$$

Et ainsi on obtiendra les valeurs des lettres p, q, r, vu que

$$\tang(r - v) = \frac{\alpha \sin r - \beta \cos r}{\alpha \cos r - \beta \sin r}.$$

PROBLEME VIII.

38. *Trouver les forces requises, pour faire tourner un corps donné autour de l'axe* OM, *de sorte que cet axe demeure immobile, & que le mouvement soit uniforme.*

SOLUTION.

Puisque le corps est donné, on aura les valeurs ff, gg, hh, ll, mm, nn; & puisqu'on veut qu'il tourne autour de l'axe OM, nous n'avons qu'à mettre dans les formules du §. 34. l'angle $\kappa = 0$, ou bien $\alpha = 0$, & $\beta = 0$; de plus, puisque le mouvement doit être uniforme, il y aura encore $dS = 0$, & S une quantité constante. Donc, pour que le corps puisse tourner d'un mouvement uniforme autour de l'axe OM, il faut qu'il soit sollicité par des forces, dont les momens sont:

I. par rapport à l'axe OM $= 0$,

II. par rapport à l'axe OS $= -2M\gamma\gamma\, mm\, SS$,

III. par rapport à l'axe OT $= -2M\gamma\gamma\, ll\, SS$,

où

où γS marque la viteſſe de rotation du corps autour de cet axe. Ou bien, ſi à la diſtance de l'axe $= a$, la viteſſe eſt due à la hauteur $= b$, la viteſſe de rotation ſera $= \frac{\sqrt{b}}{a}$, qu'il faut écrire au lieu de γS, de ſorte que ces momens par rapport aux axes OS, & OT ſeront: $- \frac{2Mbmm}{aa}$, & $- \frac{2Mbll}{aa}$, qui ſont des produits du poids du corps M par des lignes droites, tout comme la nature des momens l'exige.

Corollaire I.

39. Si la figure du corps eſt telle que $ll = 0$, & $mm = 0$, le corps pourra tourner autour de l'axe OM ſans le ſecours d'aucune force étrangere. Mais, quand ni $ll = 0$, ni $mm = 0$, il eſt impoſſible que ce mouvement ſubſiſte, ſans qu'il ſoit ſoutenu par des forces, dont les momens viennent d'être indiqués.

Corollaire II.

40. Donc, pour que le corps puiſſe tourner autour de l'axe OM ſans aucun ſecours de dehors, la figure du corps doit être telle, que rapportant ſes élémens dM à trois coordonnées $OX = x$, $XY = y$, & $YZ = z$, il ſoit

$$\int xy\,dM = 0, \qquad \& \quad \int xy\,dM = 0.$$

Corollaire III.

41. De même, afin que le corps puiſſe avoir un mouvement de rotation libre autour de l'axe OS, auquel les ordonnées y ſont paralleles, il faut qu'il ſoit $\int xy\,dM = ll = 0$, & $\int yz\,dM = nn = 0$. Et pour qu'un tel mouvement autour de l'axe OT puiſſe ſubſiſter, il faut qu'il ſoit $\int xz\,dM = mm = 0$, & $\int yz\,dM = nn = 0$.

Corollaire IV.

42. Or, afin que ce même corps puiſſe tourner librement autour d'un autre axe quelconque ON, dont le rapport aux trois axes

principaux OM, OS, OT, eſt donné par les lettres α, β, γ, il faut qu'il ſoit.

$$\alpha\beta(gg-hh)+\beta\gamma\, ll-\alpha\gamma\, mm-(\alpha\alpha-\beta\beta)nn=0,$$
$$\beta\gamma(ff-hh)+\alpha\beta\, ll-\alpha\gamma\, nn+(\beta\beta-\gamma\gamma)mm=0,$$
$$\alpha\gamma(ff-gg)+\alpha\beta\, mm-\beta\gamma\, nn+(\alpha\alpha-\gamma\gamma)ll=0.$$

SCHOLIE.

43. A moins que le corps n'ait cette propriété, ou que les valeurs ff, gg, hh, ll, mm, nn, qui dépendent de la nature du corps ne ſatisfaſſent à ces trois équations, le corps ne ſauroit tourner librement autour de l'axe ON; mais il faut que le corps ſoit ſollicité par quelques forces, qui ayent les momens marqués ci-deſſus. Ces forces ſerviront à maintenir l'axe en repos, contre les forces centrifuges des parties du corps, qui ne ſe contrebalancent pas dans ces cas. On voit donc qu'il peut y avoir une infinité d'axes dans le même corps, tous tirés par ſon centre de gravité, autour deſquels le corps ne ſauroit tourner librement. Cependant il y a toujours au moins un d'entre ſes axes, autour duquel ſe peut faire librement une rotation, ce que je m'en vais prouver dans le Théoreme ſuivant.

THÉOREME.

44. De quelque figure que ſoit le corps, on y peut toujours aſſigner un tel axe, qui paſſe par ſon centre de gravité, autour duquel le corps peut tourner librement & d'un mouvement uniforme.

DÉMONSTRATION.

Puisque le corps eſt ſuppoſé quelconque, que les quantités qui en dépendent, ff, gg, hh, ll, mm, nn, ayent des valeurs quelconques; & il faut prouver, qu'il eſt toujours poſſible de déterminer en ſorte les lettres α, β, γ, que les expreſſions des trois momens marqués dans le §. 34. évanouiſſent. Car, poſant chacun de ces trois momens $=0$, nous aurons trois équations, deſquelles je remarque

que d'abord, que si l'on multiplie la premiere par γ, la seconde par $-\alpha$, & la troisieme par β, leur somme donnera:

$$\frac{2MdS}{dt}((\alpha\alpha+\beta\beta)ff+(\beta\beta+\gamma\gamma)gg+(\alpha\alpha+\gamma\gamma)hh-2\alpha\beta nn-2\beta\gamma mm-2\alpha\gamma ll)=0,$$

d'où l'on aura $dS=0$, & partant le mouvement du corps sera uniforme. Donc, pour trouver les valeurs des lettres α, β, γ, il faut résoudre les trois équations suivantes:

$$\alpha\beta(gg-hh)-\alpha\gamma mm+\beta\gamma ll-\alpha\alpha nn+\beta\beta nn=0,$$
$$\alpha\beta ll-\alpha\gamma nn+\beta\gamma(ff-hh)+\beta\beta mm-\gamma\gamma mm=0,$$
$$\alpha\beta mm+\alpha\gamma(ff-gg)-\beta\gamma nn+\alpha\alpha ll-\gamma\gamma ll=0.$$

Or ces trois équations sont telles, que quand on aura satisfait à deux, la troisieme sera en même tems résolue. Car la premiere étant multipliée par γ, la seconde par $-\alpha$, la troisieme par β, leur somme évanouït d'elle même: de sorte que chacune de ces trois équations est déjà comprise dans les deux autres. Donc, il suffira de résoudre deux de ces équations: pour cet effet éliminons la valeur de γ qui se trouve de la premiere équation:

$$\gamma=\frac{\alpha\beta(gg-hh)-\alpha\alpha nn+\beta\beta nn}{\alpha mm-\beta ll},$$

cette valeur étant substituée dans l'une des deux autres équations, donnera:

$$+\alpha^3(llm^4-lln^4-mmnn(ff-gg))$$
$$+\alpha^2\beta(m^6-2l^4mm+mmn^4+llnn(ff+gg-2hh)+mm(ff-gg)(gg-hh))$$
$$+\alpha\beta^2(l^6-2llm^4+lln^4+mmnn(ff-2gg+hh)-ll(ff-hh)(gg-hh)$$
$$+\beta^3(l^4mm-mmn^4-llnn(ff-hh)=0.$$

De cette équation on trouvera le rapport entre α & β ou $\frac{\beta}{\alpha}=\text{tang}\, v$, & puisqu'elle est cubique, elle aura au moins une racine réelle, & de

là on aura aussi le rapport de γ à α & β, & partant $\tang u = \frac{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}{\gamma}$. Il est donc certain qu'il y a toujours en chaque corps au moins un tel axe de libre rotation, & quand les trois racines de l'équation cubique sont réelles, on aura trois tels axes. Mais il y a aussi des cas, où une infinité de tels axes a lieu; ce qui arrive lorsqu'une des trois lettres α, β, γ, demeure indéterminée, ou même toutes les trois, savoir si $ff = gg = hh$, & $ll = mm = nn = 0$.

PROBLEME IX.

45. *Déterminer tous les mouvemens autour du centre de gravité* O, *dont un corps est susceptible, lorsqu'il n'est sollicité par aucune force étrangere: supposant le corps tel qu'il y ait* $\mathrm{ll} = 0$, $\mathrm{mm} = 0$, *&* $\mathrm{nn} = 0$.

SOLUTION.

Puisque le corps n'est sollicité par aucune force, il faut que les momens requis pour maintenir son mouvement, deviennent $= 0$; de là nous obtiendrons trois équations

$$(gg + hh)\,d\mathrm{R} + (gg - hh)\,\mathrm{PQ}\,dt = 0,$$
$$(ff + hh)\,d\mathrm{P} + (hh - ff)\,\mathrm{QR}\,dt = 0,$$
$$(ff + gg)\,d\mathrm{Q} + (ff - gg)\,\mathrm{PR}\,dt = 0,$$

où les quantités ff, gg, & hh, sont connues par la nature du corps; & c'est de ces trois équations qu'il faut chercher les trois quantités P, Q, R, d'où l'on connoitra le mouvement du corps. Or, posons pour abréger:

$$\frac{gg - hh}{gg + hh} = \mu; \quad \frac{hh - ff}{hh + ff} = \nu; \quad \& \quad \frac{ff - gg}{ff + gg} = \lambda,$$

& nous aurons;

$$\text{I.} \quad d\mathrm{R} + \mu\mathrm{PQ}\,dt = 0;$$
$$\text{II.} \quad d\mathrm{P} + \nu\mathrm{QR}\,dt = 0;$$
$$\text{III.} \quad d\mathrm{Q} + \lambda\mathrm{PR}\,dt = 0.$$

Mul-

Multiplions la premiere par νR, & la feconde par μP, enfuite la feconde par λP, & la troifieme par νQ, pour obtenir ces deux équations:

$$\nu R dR = \mu P dP, \quad \& \quad \nu Q dQ = \lambda P dP,$$

d'où nous tirons:

$$RR = \frac{\mu}{\nu}(A + PP), \quad \& \quad QQ = \frac{\lambda}{\nu}(B + PP),$$

$$\text{donc } QR = \sqrt{\frac{\lambda\mu}{\nu\nu}(A + PP)(B + PP)}.$$

Or la premiere équation étant $\nu R dR + \mu\nu PQR dt = 0$, à caufe de $\nu R dR = \mu P dP$, fe change en $dP + \nu QR dt = 0$, d'où nous arrivons à cette équation féparée:

$$dt = \frac{-dP}{\sqrt{\lambda\mu(A + PP)(B + PP)}},$$

dont l'intégrale marquera à chaque tems écoulé t la valeur de P, & de là on aura auffi

$$Q = \sqrt{\frac{\lambda}{\nu}(B + PP)}, \quad \& \quad R = \sqrt{\frac{\mu}{\nu}(A + PP)},$$

Par là on connoitra à chaque inftant l'axe de rotation du corps, autour duquel la viteffe de rotation fera

$$\sqrt{(PP + QQ + RR)} = \sqrt{\frac{\mu A + \lambda B + (\lambda + \mu + \nu)PP}{\nu}},$$

or $\lambda + \mu + \nu = -\lambda\mu\nu$, de forte que la viteffe de rotation fera $= \sqrt{\left(\frac{\mu A + \lambda B}{\nu} - \lambda\mu PP\right)}$.

COROLLAIRE I.

46. Confidérant les valeurs des lettres λ, μ, ν, il eft clair qu'il ne peut pas arriver, que toutes les trois ayent des valeurs affirmatives, mais il y en aura toujours ou une ou deux négatives. Ainfi, de

de ces deux fractions $\frac{\lambda}{\nu}$, & $\frac{\mu}{\nu}$, ou l'une ou toutes les deux seront nécessairement négatives. Par conséquent, on ne sauroit supposer à la fois & $A = o$, & $B = o$, à moins qu'il ne soit $P = o$, & alors le corps sera en repos.

COROLLAIRE II.

47. Donc, puisque la formule différentielle n'est pas intégrable en général, si nous voulons considérer des cas où elle admet l'intégration, il faut commencer par poser la constante $B = o$, supposant que $\frac{\lambda}{\nu}$ soit une quantité positive. Soit donc $\frac{\lambda}{\nu} = \alpha\alpha$, & $\frac{\mu}{\nu} = -\beta\beta$; & $A = -aa$, pour avoir $Q = \alpha P$; $R = \beta\sqrt{(aa - PP)}$, & $dt = \frac{-dP}{\nu\alpha\beta P\sqrt{(aa - PP)}}$, dont l'intégrale est $\nu\alpha\beta t = \frac{1}{a} l \frac{a + \sqrt{(aa - PP)}}{P}$. Que e marque le nombre dont le logarithme $= 1$, & soit $Ce^{\nu\alpha\beta at} = T$, ou bien soit $\nu\alpha\beta a = c$, & partant

$$a = \frac{c}{\sqrt{-\lambda\mu}} = \frac{c\sqrt{(ff + gg)(gg + hh)}}{\sqrt{(ff - gg)(gg - hh)}}.$$

Ayant donc $PT = a + \sqrt{(aa - PP)}$, nous obtiendrons $P = \frac{2aT}{1 + TT}$, & $\sqrt{(aa - PP)} = \frac{a(TT - 1)}{1 + TT}$: & partant $Q = \frac{2\alpha aT}{1 + TT}$, & $R = \frac{\beta a(TT - 1)}{1 + TT}$. Or la vitesse de rotation sera $= \frac{a}{1+TT}\sqrt{(\beta\beta(TT-1)^2 + 4(1+\alpha\alpha)TT)}$.

Co-

COROLLAIRE III.

48. Puisque $T = Ce^{ct}$, je remarque d'abord, qu'après quelque tems la valeur de T devient ou fort grande ou fort petite, ſelon que c a une valeur poſitive ou négative. Donc il ne durera gueres longtems depuis le commencement du mouvement, qu'il ne devienne fort à peu près $P = o$, & $Q = o$, ce qui eſt le cas où le corps tournera librement autour de l'axe OM.

Remarque.

49. Voilà une circonſtance très remarquable, que dans ce cas le corps, après avoir commencé à tourner ſur un axe mobile, change bientôt tellement ce mouvement vague, qu'il approche de plus en plus du mouvement autour d'un axe fixe. Et quoique cela ne ſe trouve que dans le cas que je viens de conſidérer, cette circonſtance eſt ſi ſinguliere, qu'il n'y a presque aucun doute qu'elle ne ſoit beaucoup plus générale: de ſorte que, quelque irrégulier puiſſe être le mouvement qu'on aura imprimé à un corps quelconque, l'irrégularité en diſparoitra fort ſouvent peu à peu, & le corps s'accommodera enfin à tourner autour d'un axe fixe, avec un mouvement uniforme. Or je viens de démontrer, que, quelque irréguliere que ſoit la figure du corps, il y a toujours au moins un axe autour duquel le corps puiſſe tourner librement. Au reſte la condition du probleme, que $ll = o$, $mm = o$, $nn = o$, renferme tous les corps dont le point O eſt en même tems le centre de gravité & le centre de figure ou de grandeur: mais comme ce cas n'a point admis l'intégration en général, je m'en vais y ajouter encore une condition, qui eſt que $gg = hh$, & qui ne laiſſe pas de comprendre une infinité de corps, comme tous les ſphéroïdes tant allongés qu'applatis, avec une infinité d'autres, qui ont en O tant leur centre de gravité que celui de figure: mais l'égalité $gg = hh$ exige, que le corps ait des parties égales & ſemblables ſelon deux dimenſions.

PROBLE-

PROBLEME X.

50. *Déterminer tous les mouvemens dont les corps sphéroïdiques, tant allongés qu'applatis, sont susceptibles, tandisqu'ils ne sont assujettis à aucune force étrangere.*

SOLUTION.

Soit OM l'axe véritable du sphéroïde, & les deux autres OS, & OT, soient égaux entr'eux, ou qu'ils fournissent au moins deux valeurs égales pour les quantités gg & hh. Et puisque de tous ces corps le point O est le centre de gravité & celui de grandeur, les quantités ll, mm, nn, évanouiront. Cela remarqué, posant $hh = gg$, nous aurons, pour tous les mouvemens dont ces corps sont susceptibles, les trois équations suivantes:

$$\text{I.}\qquad dR = 0,$$

$$\text{II.}\quad (ff + gg)\,dP - (ff - gg)QR\,dt = 0,$$

$$\text{III.}\quad (ff + gg)\,dQ + (ff - gg)PR\,dt = 0.$$

Nous en tirons donc d'abord $R = A$, marquant par A une quantité constante quelconque. Depuis posant pour abréger $\frac{ff - gg}{ff + gg} = \lambda$, où λ sera une quantité ou positive ou négative selon que $ff > gg$, ou $ff < gg$, les deux autres équations à résoudre seront:

$$dP - \lambda AQ\,dt = 0, \quad \& \; dQ + \lambda AP\,dt = 0,$$

qui donnent $PdP + QdQ = 0$, & partant:

$$PP + QQ = aa.$$

Donc, puisque $Q = \sqrt{(aa - PP)}$, nous aurons

$$\frac{dP}{\sqrt{(aa - PP)}} = \lambda A\,dt,$$

& partant $A\sin\frac{P}{a} = \lambda At + \alpha$, ou $P = a\sin(\lambda At + \alpha)$,

&

& $Q = a \operatorname{cof}(\lambda A t + \alpha)$. Donc, après le tems t, le corps tournera autour de l'axe ON, de forte que

$$\operatorname{tang} LMN = \operatorname{tang} v = \cot(\lambda A t + \alpha), \quad \&$$
$$\operatorname{tang} MON = \operatorname{tang} u = \frac{a}{A}:$$

Par conféquent l'axe de rotation ON quoique variable fera toujours avec l'axe du corps OM un angle conftant MON; qui étant pofé $= \zeta$, nous aurons $A = \frac{a}{\operatorname{tang}\zeta}$, & enfuite l'angle LMN fera $= C - \frac{\lambda a t}{\operatorname{tang}\zeta}$, de forte que les changemens de cet angle feront proportionels au tems. Enfuite nous aurons:

$$P = a \operatorname{cof}\left(C - \frac{\lambda a t}{\operatorname{tang}\zeta}\right), \quad Q = \operatorname{fin}\left(C - \frac{\lambda a t}{\operatorname{tang}\zeta}\right),$$
$$\& \quad R = \frac{a}{\operatorname{tang}\zeta},$$

& la viteffe de rotation autour de cet axe mobile ON fera $= \sqrt{(PP + QQ + RR)} = \frac{a}{\operatorname{fin}\zeta}$, & partant conftante. Soit ϵ cette viteffe de rotation, ou $a = \epsilon \operatorname{fin}\zeta$, & nous aurons

$$P = \epsilon \operatorname{fin}\zeta \operatorname{cof}(C - \lambda \epsilon t \operatorname{cof}\zeta),$$
$$Q = \epsilon \operatorname{fin}\zeta \operatorname{fin}(C - \lambda \epsilon t \operatorname{cof}\zeta), \quad \&$$
$$R = \epsilon \operatorname{cof}\zeta.$$

Ayant trouvé les valeurs des lettres P, Q, R, le mouvement du point M, avec celui du premier méridien du corps LM, fera déterminé par les équations fuivantes:

$$dp \operatorname{fin} q \operatorname{cof} r + dq \operatorname{fin} r = \epsilon dt \operatorname{fin}\zeta \operatorname{cof}(C - \lambda \epsilon t \operatorname{cof}\zeta)$$
$$dp \operatorname{fin} q \operatorname{fin} r - dq \operatorname{cof} r = \epsilon dt \operatorname{fin}\zeta \operatorname{cof}(C - \lambda \epsilon t \operatorname{cof}\zeta)$$
$$dp \operatorname{cof} q - dr = \epsilon dt \operatorname{cof}\zeta.$$

Or la résolution de ces équations est extrèmement difficile, & je ne vois pas encore, comment on y pourroit parvenir. Cependant on voit que ce mouvement n'est pas irrégulier en lui-même, vu que l'axe de rotation ON se meut d'un mouvement uniforme autour de l'axe principal OM, & que le mouvement de rotation du corps autour de cet axe ON est uniforme.

Corollaire I.

51. Donc, lorsqu'on aura imprimé à un tel corps un mouvement de rotation dont la vitesse soit $= \varepsilon$, autour d'un axe oblique ON, qui fasse avec l'axe principal un angle MON $= \zeta$, le corps ne pourra pas continuer ce mouvement, mais son axe de rotation changera continuellement, de sorte pourtant que l'angle demeure toujours le même.

Corollaire II.

52. Puisque l'angle LMN qui marque à chaque tems l'axe de rotation est $= v = C - \lambda \varepsilon t \cos\zeta$, la vitesse de ce changement sera $= - \lambda \varepsilon \cos\zeta$. Donc ce changement d'axe de rotation évanouira lorsque $\lambda = 0$, c. à d. lorsque $ff = gg = hh$. Donc, dans ce cas, le corps peut tourner librement autour de tout axe ON, autour duquel il aura été mis une fois en mouvement.

Corollaire III.

53. Or, puisque $\lambda \varepsilon \cos\zeta$ marque la vitesse du changement de l'angle LMN, la vitesse du changement du point N ou de l'axe ON même, sera d'autant plus grande que le point N sera plus éloigné de l'axe OM. Donc la vraye vitesse du changement de l'axe de rotation sera $= - \lambda \varepsilon \cos\zeta \sin\zeta$, d'où l'on voit, que l'axe de rotation demeurera immobile, tant dans le cas où l'angle MON évanouit, que dans le cas ou cet angle est droit.

Remarque.

54. Or, si nous considérons, que la distance MN $= \zeta$, demeure toujours la même, & que tant le mouvement du point M autour

autour de N, que celui du point N, eſt uniforme, nous en concluons aiſément que le point M ſe meut autour d'un axe fixe dans le Ciel. Donc, ſi nous prenons OC pour cet axe fixe, l'arc $CM = q$ ſera conſtant, & partant $dq = 0$, d'où la réſolution de nos équations, en diviſant l'une par l'autre,

$$\frac{\operatorname{cof} r}{\operatorname{fin} r} = \frac{\operatorname{cof}(C - \lambda \varepsilon t \operatorname{cof} \zeta)}{\operatorname{fin}(C - \lambda \varepsilon t \operatorname{cof} \zeta)},$$

& partant $r = CML = C - \lambda \varepsilon t \operatorname{cof} \zeta$. De plus, nous aurons $dp = \frac{\varepsilon dt \operatorname{fin} \zeta}{\operatorname{fin} q}$, & ces valeurs étant ſubſtituées dans la troiſieme équation donnent

$$\frac{\varepsilon dt \operatorname{fin} \zeta \operatorname{cof} q}{\operatorname{fin} q} + \lambda \varepsilon dt \operatorname{cof} \zeta = \varepsilon dt \operatorname{cof} \zeta,$$

& partant

$$\operatorname{tang} q = \frac{\operatorname{fin} \zeta}{(1 - \lambda) \operatorname{cof} \zeta} = \frac{\operatorname{tang} \zeta}{1 - \lambda} = \frac{ff + gg}{2gg} \operatorname{tang} \zeta.$$

Donc le mouvement du ſphéroïde propoſé ſera tel, que ſon axe OM, ou bien ſon pole M, ſe meut uniformement autour du point fixe dans le Ciel C, qui en eſt éloigné à une diſtance $CM = q$, de ſorte que $\operatorname{tang} q = \frac{ff + gg}{2gg} \operatorname{tang} \zeta$; & la viteſſe de cette rotation ſera $= \frac{dp}{dt} = \frac{\varepsilon \operatorname{fin} \zeta}{\operatorname{fin} q}$ dans le ſens AP: cette viteſſe ſera donc $= \frac{\varepsilon \sqrt{(4g^4 \operatorname{cof} \zeta^2 + (ff + gg)^2 \operatorname{fin} \zeta^2)}}{ff + gg}$. Ou, bien ſi nous voulons regarder l'arc $CM = q$ comme connu, nous aurons $\operatorname{tang} \zeta = \frac{2gg}{ff + gg} \operatorname{tang} q$, & $\operatorname{fin} \zeta = \frac{2gg \operatorname{fin} q}{\sqrt{(4g^4 \operatorname{fin} q^2 + (ff + gg)^2 \operatorname{cof} q^2)}}$, & $\operatorname{cof} \zeta = \frac{(ff + gg) \operatorname{cof} q}{\sqrt{(4g^4 \operatorname{fin} q^2 + (ff + gg)^2 \operatorname{cof} q^2)}}$, & la viteſſe de rotation du

du pole M autour du point C sera $= \frac{2\epsilon gg}{\sqrt{(4g^4 \sin q^2 + (ff+gg)^2 \cos q^2)}}$.
Ensuite, puisque $dr = - \lambda\epsilon dt \cos\zeta$, le premier méridien du corps MS tournera cependant autour de l'axe OM dans le sens ST avec une vitesse de rotation $= \frac{dr}{dt} = \lambda\epsilon \cos\zeta = \frac{\epsilon(ff - gg)\cos q}{\sqrt{(4g^4 \sin q^2 + (ff + gg)^2 \cos q^2)}}$. Le mouvement de ce corps sera donc semblable à celui de la terre, si nous faisons abstraction de la nutation de la terre: car, regardant le point C comme le pole de l'écliptique, le mouvement de notre corps sera tel, que premierement son axe OM tourne d'un mouvement uniforme autour du pole de l'écliptique C, la distance CM étant constante $= q$, & la vitesse de rotation dans le sens AP $= \frac{2\epsilon gg}{\sqrt{(4g^4 \sin q^2 + (ff+gg)^2 \cos q^2}}$.
Ensuite, le corps lui-même tournera autour de son axe OM dans le sens ST avec une vitesse de rotation $= \frac{\epsilon(ff-gg)\cos q}{\sqrt{(4g^4 \sin q^2 + (ff+gg)^2 \cos q^2)}}$, & les deux mouvemens se feront en même sens, lorsque $ff > gg$, c'est à dire lorsque le sphéroïde sera allongé, & le contraire arrivera, lorsqu'il sera applati. Cependant on ne sauroit soutenir que le mouvement de la terre soit conforme avec ces formules; car, si le corps est supposé à peu près sphérique, ou ff presque égal à gg, le mouvement du corps autour de son axe OM, qui devroit répondre au mouvement diurne de la terre, devient extrèmement lent, & l'autre, qui représente la précession des équinoxes, demeure très rapide. Donc, puisque ce mouvement est si différent de celui de la terre, il est évident que la précession des équinoxes est causée par quelque force étrangere, laquelle est sans contredit la force attractive de la lune.

PRO-

PROBLEME GÉNÉRAL.

55\. *Un corps ſolide étant à chaque inſtant ſollicité par des forces quelconques, déterminer le mouvement qu'il pourſuivra, après qu'on lui aura imprimé un mouvement quelconque.*

SOLUTION.

Qu'on conſidere d'abord le mouvement du centre de gravité du corps, & concevant que toute ſa maſſe y ſoit réunie, qu'on y applique à chaque inſtant les forces qui agiſſent ſur le corps; & en ſuivant les regles de la Mécanique, on déterminera le mouvement progreſſif, ou celui du centre de gravité du corps. Or, pour trouver le mouvement de rotation du corps, on concevra ſon centre de gravité comme demeurant en repos, & on cherchera le mouvement, qu'il auroit alors; & en combinant ces deux mouvemens, le progreſſif & celui de rotation enſemble, on aura le mouvement entier du corps. Mais, pour trouver le mouvement de rotation, on procédera de la maniere ſuivante.

I. On choiſira à volonté dans le corps trois axes OM, OS, & OT, qui ſe croiſent enſemble dans ſon centre de gravité O à angles droits: enſuite on rapportera chaque élément du corps Z à ces trois axes par les trois coordonnées OX, XY, & YZ, paralleles aux axes. Depuis, poſant l'élément du corps ſitué en Z $= dM$, & les trois coordonnées Fig. 5.

$$OX = x, \qquad XY = y, \qquad \& \quad YZ = z,$$

qu'on cherche pour le corps entier les intégrales ſuivantes

$$\int xx\,dM, \quad \int yy\,dM, \quad \int zz\,dM,$$
$$\int xy\,dM, \quad \int xz\,dM, \quad \int yz\,dM,$$

& nommant la maſſe du corps entier $= M$, ſoient les valeurs de ces intégrales:

$$\int xx\,dM = Mff, \qquad \int xy\,dM = Mll,$$
$$\int yy\,dM = Mgg, \qquad \int xz\,dM = Mmm,$$
$$\int zz\,dM = Mhh, \qquad \int yz\,dM = Mnn,$$

II.

II. Pour les forces dont le corps eſt ſollicité à chaque inſtant, puisqu'elles ſont connues, qu'on cherche leurs momens par rapport à chacun des trois axes, & ſoit, après le tems écoulé $= t$,

Le moment des forces autour
de l'axe OM dans le ſens ST $=$ X.

Le moment de forces autour
de l'axe OS dans le ſens TM $=$ Y.

Le moment des forces autour
de l'axe OT dans le ſens MS $=$ Z.

Depuis il faut chercher les trois quantités P, Q, & R, par les trois équations ſuivantes:

$$\frac{Xdt}{2M} = \begin{cases} (gg+hh)dR + (gg-hh)PQdt \\ -lldP - mmdQ + llQRdt - mmPRdt - nnPPdt + nnQdt, \end{cases}$$

$$\frac{Ydt}{2M} = \begin{cases} (hh+ff)dP + (hh-ff)QRdt \\ -nndQ - lldR + nnPRdt - llPQdt - mmQQdt + mmRRdt, \end{cases}$$

$$\frac{Zdt}{2M} = \begin{cases} (ff+gg)dQ + (ff-gg)PRdt \\ -mmdR - nndP + mmPQdt - nnQRdt - llRRdt + llPPdt, \end{cases}$$

Fig. 4. III. Enſuite on rapportera le corps à l'eſpace abſolu, à la ſphere celeſte ACB, dont le centre O ſoit occupé par le centre de gravité du corps, & que les trois axes du corps OM, OS, OT, tiennent dans l'inſtant préſent la ſituation marquée dans la figure: & je dis que dans cet inſtant le corps tournera autour de l'axe ON, dont la poſition à l'égard des trois axes du corps ſera déterminée en ſorte

$$\text{tang SMN} = \frac{Q}{P}, \quad \& \text{ tang MON} = \frac{\sqrt{(PP+QQ)}}{R},$$

ou bien la ligne ON ſera tellement inclinée aux trois axes que

tang

$$\text{tang MON} = \frac{\sqrt{(PP+QQ)}}{R}, \quad \text{tang SON} = \frac{\sqrt{(QQ+RR)}}{P};$$

$$\text{tang TON} = \frac{\sqrt{(RR+PP)}}{Q},$$

& la viteſſe de rotation autour de cet axe ON ſera $=$
$\sqrt{(PP + QQ + RR)}$.

IV. Or cela ne ſuffit pas encore pour connoitre le vrai mouvement du corps, il faut ſavoir à quels points répondent les trois axes du corps dans le Ciel. Soit donc l'angle ACM $= p$, l'arc CM $= q$, & l'angle CMS $= r$; & il eſt clair que, connoiſſant ces trois quantités p, q, & r, on ſera en état de déterminer la vraye ſituation du corps à l'égard de l'eſpace abſolu. Or il faut tirer les valeurs de ces quantités des trois formules ſuivantes:

$$dp \sin q \cos r + dq \sin r = P\,dt$$
$$dp \sin q \sin r - dq \cos r = Q\,dt$$
$$dp \cos q - dr = R\,dt.$$

Voilà donc toute la ſolution du probleme réduite à des équations purement analytiques, auxquelles on doit borner la recherche, puisque leur réſolution ſemble ſurpaſſer les bornes de nos lumieres dans l'Analyſe.

COROLLAIRE I.

56. Quelque difficile que ſoit la réſolution des formules dans N°. II. & N°. IV. il eſt remarquable que celles de N°. II. en multipliant la premiere par R, la ſeconde par P, & la troiſieme par Q, produiſent une ſomme intégrable qui eſt:

$$\frac{1}{M}(\int RX\,dt + \int PY\,dt + \int QZ\,dt) =$$
$$(gg + hh)RR + (hh + ff)PP + (ff + gg)QQ$$
$$- 2ll\,PR - 2mm\,QR - 2nn\,PQ,$$

qui renferme la conſervation des forces vives.

COROLLAIRE II.

57. On peut encore trouver une autre équation intégrale des formules N°. II. Car multipliant

la premiere par $ffR + llP + mmQ$,
la seconde par $ggP + nnQ + llR$,
la troisieme par $hhQ + mmR + nnP$,

l'intégrale de la somme sera:

$$\frac{1}{M}(ff\int RXdt + gg\int PYdt + hh\int QZdt +$$

$$\frac{1}{M}(ll\int(PX+RY)dt - mm\int(QX+RZ)dt + nn\int(QY+PZ)dt) =$$

$$ff(gg+hh)RR + gg(hh+ff)PP + hh(ff+gg)QQ$$
$$+ 2hhllPR + 2ffnnPQ + 2ggmmQR.$$

COROLLAIRE III.

58. Donc, si le corps n'est sollicité par aucune force, on a d'abord pour N°. II. deux équations intégrales: savoir

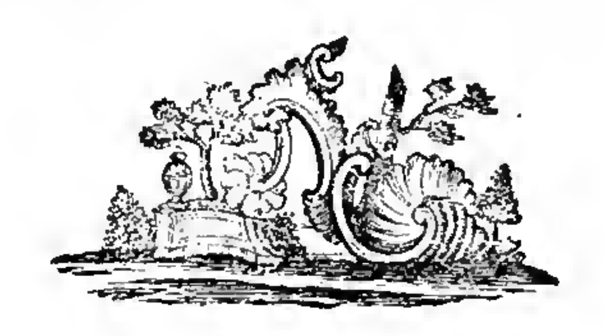
$$\left.\begin{array}{l}(gg+hh)RR + (hh+ff)PP + (ff+gg)QQ \\ \quad - 2llPR \quad - 2nnPQ \quad - 2mmQR\end{array}\right\} = C,$$

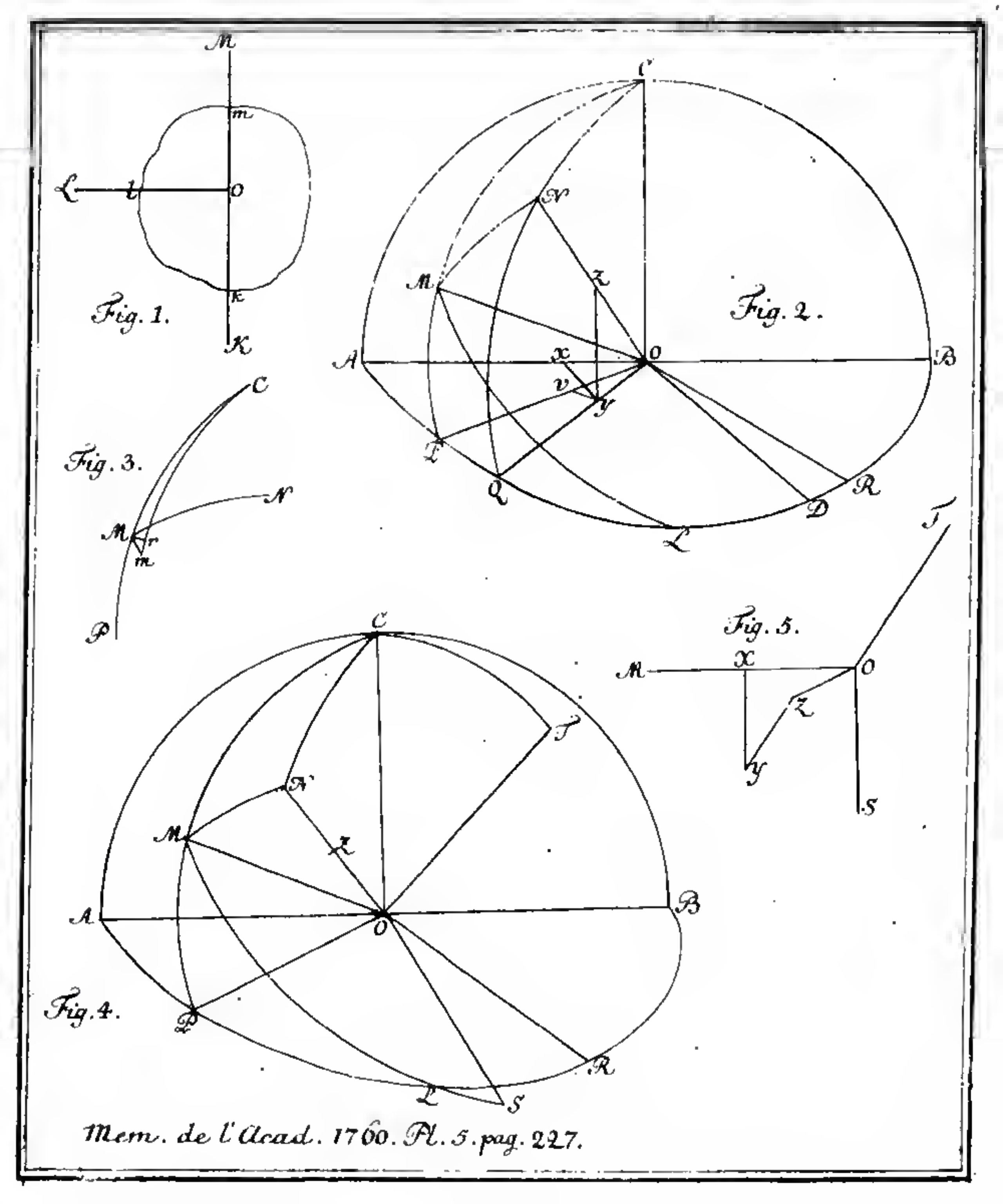
$$\left.\begin{array}{l}ff(gg+hh)RR + gg(hh+ff)PP + hh(ff+gg)QQ \\ + 2hhllPR + 2ffnnPQ + 2ggmmQR\end{array}\right\} = D.$$

Remarque.

59. Cette résolution du probleme, que je viens de développer, est sans contredit plus simple que celle que j'en ai donnée autrefois, vu que les formules qui contiennent la solution, sont moins embarrassées. Mais le plus grand avantage consiste en ce que cette solution est beaucoup plus propre à être appliquée à tous les cas qu'on puisse proposer. La raison en est évidente, parce que j'ai réduit ici le

le calcul des élémens qui dépendent de la figure du corps, à des axes qui ſont fixes dans le corps, de ſorte que ces élémens demeurent toujours les mêmes; au lieu que la premiere ſolution exige pour chaque ſituation différente une nouvelle recherche de ces élémens, puisqu'ils étoient rapportés à des axes fixes dans l'eſpace abſolu, à l'égard desquels la poſition du corps peut changer à tous momens. Cependant, quoique cette ſolution ſoit complette, il s'en faut encore beaucoup qu'elle ſoit déjà aſſez développée: le plus ſeur moyen de porter cette matiere à un plus haut degré d'évidence ſera ſans doute d'en faire l'application à des cas déterminés, & auſſi ſimples qu'il ſera poſſible; car alors on ne manquera pas de découvrir des artifices pour la réſolution de ces formules, lesquels, quoiqu'ils paroiſſent particuliers aux cas qu'on traite, conduiront néanmoins à une plus grande généralité. Puisque donc le mouvement de cette eſpece étoit encore la ſeule choſe qui manquoit dans la Théorie des corps ſolides, je me flatte de l'avoir portée à un tel degré de connoiſſance, qu'on ſera en état d'aſſujettir au calcul tous ces mouvemens compliqués, avec la même addreſſe dont on a uſé jusqu'ici à l'égard des mouvemens ſimples.





Mem. de l'Acad. 1760. Pl. 5. pag. 227.